جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
قطاع الكتب

الميكانيكا

الصف الثالث الثانوى
القسم العلمى

٢٠١٣ - ٢٠١٤م

الميكانيكا

للصف الثالث الثانوى

تأليف

أ. محمد رجائى طحيمر

أ. د. أحمد فؤاد غالب

أ.د. سعد كامل أحمد مسعود

أ. محمد لطفى عبد الله

طبعة ٢٠١٣/٢٠١٤م

(غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية و التعليم)

أعد الكتاب
نخبة من خبراء الرياضيات

مراجعة
أ. حسين محمود حسين
مستشار الرياضيات

المحتويات

المقـــدمة

يسعدنا أن نقدم لأبنائنا طلبة وطالبات الصف الثالث الثانوى هذا الكتاب فى الميكانيكا وفى ضوء توجيهات السيد الدكتور / وزير التربية والتعليم ، تمت إعادة تبويب الكتاب ومراجعته وتحديث مفردات المحتوى بما يجعل الكتاب فى صورة أدت إلى تبسيط عرض بعض الموضوعات وتزويد بعضها ببعض الأمثلة الإثرائية الحياتية .

وقد راعينا فى عرض موضوعاته التأكيد على المفاهيم والمهارات الرياضية التى تساعد الطالب على حل المشكلات معتمداً فى ذلك على المستويات العليا للتفكير و ليس الحفظ والاستظهار .

ولم نغفل فى عرض المادة العلمية ، ربط ما يدرسه الطالب بواقع حياته اليومية ، وقد راعينا أيضاً فى عرض الأمثلة والتمارين التدرج من السهل إلى الصعب ، ومراعاة الفروق الفردية بين الطلاب .

ويحتوى هذا الكتاب موضوعى الاستاتيكا والديناميكا :

أولاً : الاستاتيكا : عُرض هذا الجزء فى خمسة فصول ، الفصل الأول : "الاحتكاك" ، والفصل الثانى : "العزوم" ، والفصل الثالث : "القوى المتوازية المستوية" ، والفصل الرابع : " الاتزان العام " و الفصل الخامس : الازدواجات "

ثانياً : الديناميكا : عُرض هذا الجزء فى أربعة فصول ، الفصل الأول : " قوانين نيوتن للحركة " ، و الفصل الثانى : " تطبيقات على قوانين نيوتن – الحركة على مستوى خشن "، والفصل الثالث "الدفع والتصادم" ، و الفصل الرابع : " الشغل والقدرة والطاقة "

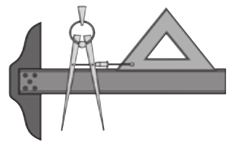
وقد ذيلنا هذا الكتاب بمجموعة من نماذج الاختبارات الخاصة بالميكانيكا والتى تؤكد على قياس نواتج التعلم المراد تمكين الطالب منها وهى مزودة بإجابات نهائية .

والله من وراء القصد

لجنة إعداد الكتاب

الجزء الأول

الاستاتيكا



الاحتكاك

الفصل الأول

- **مقدمـــة :**

نتناول فى هذا الفصل ظاهرة الاحتكاك وخواصها .

- **الأهداف :**

فى نهاية تدريس هذا الفصل ينبغى أن يكون الطالب قادراً على أن :

١ – يتعرف على كل من قوة الفعل و قوة رد الفعل واتجاه كل منهما بين جسمين متلامسين فى حالتى [الجسمان ملساوان والجسمان خشنان] .

٢ – يتعرف على قوة الاحتكاك وخواص الاحتكاك والاحتكاك النهائى .

٣ – يتعرف على معامل الاحتكاك وزاوية الاحتكاك .

٤ – يتعرف على شروط اتزان جسم على مستوى مائل خشن .

٥ – يتعرف على العلاقة بين قياس زاوية الاحتكاك وقياس زاوية ميل المستوى على الأفقى عند وضع جسم على مستوى مائل خشن شرط أن يكون على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط .

- الموضوعات :

١– خواص الاحتكاك

٢– معامل الاحتكاك

٣– زاوية الاحتكاك

٤– اتزان جسم على مستوى أفقى خشن

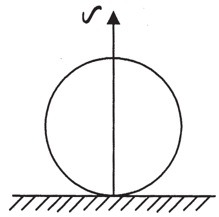
٥– اتزان جسم على مستوى مائل خشن

الاحتكاك

ندرس فى هذا الفصل ظاهرة الاحتكاك و خواصها و سنعتبر أن الأجسام التى نتعامل معها تسلك نفس سلوك الجسميات ، أى أنه يمكن اعتبار الجسم مركزا فى نقطة هندسية .

رد الفعل :

ينص قانون الحركة الثالث لنيوتن و الذى سبق للطالب دراسته أن ((لكل فعل رد فعل مساو له فى المقدار و مضاد له فى الاتجاه)) .



شكل (١)

و يعنى القانون أنه إذا أثر جسم على آخر بقوة ما (الفعل) فإن الجسم الآخر يؤثر بدوره على ألأول بقوة (رد الفعل) تساوى القوة الأولى فى المقدار و تضادها فى الاتجاه .

فإذا وضعت كرة على نضد مثلاً كما فى شكل (١) ، فإن الكرة تؤثر على النضد بقوة (الفعل) و نجد أن النضد يؤثر على الكرة بقوة (رد الفعل) و يرمز لمعيارها بالرمز ر و تتساوى هاتان القوتان فى المقدار و تتضادان فى الاتجاه .

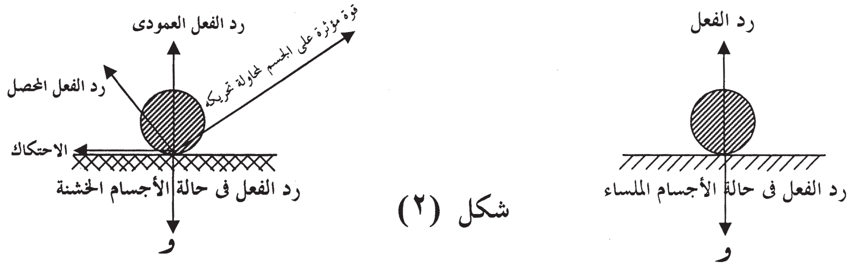
و يجب ملاحظة أن هاتين القوتين لا تؤثران فى جسم واحد فإحدى القوتين و لتكن الفعل تؤثر فى النضد بينما تؤثر القوة الثانية – رد الفعل – فى الكرة .

قوة الاحتكاك :

إذا أعطيت دفعة لمكعب من الخشب أو الزجاج على نضد أفقى فستجد أنه يتزلق على النضد مسافة معينة تأخذ سرعته خلالها فى التناقص حتى يقف تماما ، و يعنى ذلك بطبيعة الحال وجود قوة تقاوم حركة المكعب على سطح النضد و تعمل على إيقافه ، و تسمى هذه القوة ((قوة الاحتكاك بين المكعب و النضد)) . و عموما ، تلعب قوى الاحتكاك دورا كبيرا فى حياتنا العملية ، فلولاها لما استطعنا السير على ألأرض دون أن نـــزلق و لما استطاعت القاطرة أن تجر قطارا دون أن تنـــزلق عجلات القطار . . إلخ .

الأجسام الملساء و الأجسام الخشنة :

تتوقف أى من قوتى الفعل ورد الفعل بين جسمين متلامسين على طبيعة هذين الجسمين ، وأيضا على القوى الأخرى المؤثرة عليهما .



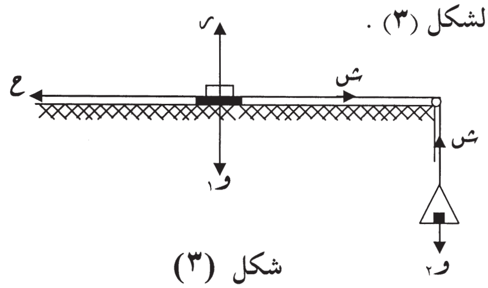
شكل (٢)

ففى حالة الأجسام الملساء يكون رد الفعل عموديا على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين ، أما إذا كان الجسمان خشنين وعند محاولة تحريك الجسم يكون لقوة رد الفعل مركبة موازية لسطح التماس هى ((قوة الاحتكاك)) ومركبة عمودية على سطح التماس هى ((قوة رد الفعل العمودى)) أما قوة رد الفعل نفسها ، فتسمى ((قوة رد الفعل المحصل)) ، وفى كثير من الأحيان يستعاض عن قوة رد الفعل المحصل بمركبتيها ((قوة الاحتكاك وقوة رد الفعل العمودى))

يبين شكل (٢) قوة رد فعل نضد على جسم موضوع عليه .

تجربة عملية :

ضع قطعة مستوية من الخشب على نضد أفقى واربطها بخيط يمر على بكرة ملساء عند حافة النضد و يتدلى الخيط رأسيا بحامل خفيف للصنج كما فى الشكل (٣) .



شكل (٣)

ضع أثقالا مناسبة على القطعة الخشبية وضع فى حامل الصنج ثقلاً صغيرا تلاحظ أن القطعة الخشبية لا تتحرك ، و معنى ذلك أن قوة الاحتكاك التى أثرت على القطعة الخشبية كانت كافية لمنع الحركة رغم وجود الشد فى الخيط **ش** وكما هو معروف ، فإن مقدار هذا الشد يساوى وزن الحامل ووزن الصنج الموضوعة فيه معا .

زد الصنج الموضوعة على الحامل بالتدريج تلاحظ أن القطعة الخشبية تبدأ فى التحرك على النضد عندما تصل الأثقال الموضوعة فى الحامل إلى حد معين .

و يعنى هذا أن مقدار قوة الاحتكاك يتزايد كلما تزايد الشد و أنه يصل إلى حد معين لا يتعداه . فإذا زاد الشد عن هذا الحد لم يستطع الاحتكاك موازنته و يبدأ الجسم فى الحركة ، و يلاحظ كذلك أنه لو زدنا الأثقال الموضوعة على القطعة الخشبية فإننا نحتاج إلى زيادة الثقل الموضوع فى حامل الصنج حتى تصبح القطعة الخشبية على وشك الحركة .

يبين شكل (٣) القوى المؤثرة على القطعة الخشبية وهى :

١– قوة وزن القطعة الخشبية والأثقال الموضوعة عليها ، وسنرمز لمقدار هذه القوة بالرمز $و_١$.

٢– قوة الشد فى الخيط ويساوى مقدارها وزن حامل الصنج و الصنج الموجودة عليه ، وسنرمز لمقدار الشد بالرمز **ش**

٣– قوة الاحتكاك وتوازى النضد ، أى أنها أفقية ، سنرمز لمقدارها بالرمز **ع** .

٤– قوة رد الفعل العمودى ، وسنرمز لمقدارها بالرمز ر .

عند التوازن تكون قوة الاحتكاك مضادة فى الاتجاه لقوة الشد وتكون قوة رد الفعل العمودى مضادة فى الاتجاه لقوة الوزن وتتحقق المتساويتان :

ر = $و_١$ ، ع = ش

نستنتج من التجربة السابقة خواص الاحتكاك الآتية :

خواص الاحتكاك :

١– تعمل قوة الاحتكاك على معاكسة الحركة فتكون فى اتجاه مضاد للاتجاه الذى يميل الجسم إلى التحرك فيه .

٢– كلما تزايد مقدار القوة المماسية التى تعمل على تحريك الجسم ، تزايد مقدار قوة الاحتكاك بحيث يساوى مقدار القوة المماسية ما دام الجسم متزنا .

٣– يزداد مقدار قوة الاحتكاك إلى أن يصل حدا لا يتعداه وعندئذ يصبح الجسم على وشك الحركة ويسمى الاحتكاك فى هذه الحالة ((الاحتكاك النهائى)) وعند حدوث الحركة يظل مقدار قوة الاحتكاك مساويا لقيمته العظمى المذكورة سابقا ، أى أن الاحتكاك يظل نهائيا أثناء الحركة .

٤– تكون النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل العمودى ثابتة ، وتتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكليهما أوعلى كتلتيهما .

معامل الاحتكاك :

تسمى النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك النهائى ورد الفعل العمودى ((بمعامل الاحتكاك)) .

فإذا رمزنا لمقدار قوة الاحتكاك النهائى بالرمز ك ولمقدار قوة رد الفعل العمودى عندئذ بالرمز ر ولمعامل الاحتكاك بالرمز م فإن : $\boxed{\frac{\text{ك}}{\text{ر}} = \text{م}}$

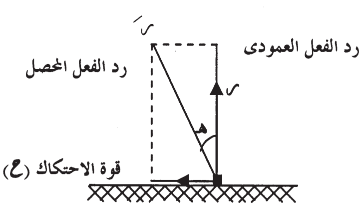
ومنه نستنتج أن : ك = م ر

وهذه هى أقصى قيمة يمكن أن يصل إليها مقدار قوة الاحتكاك ، وعلى الطالب أن يتذكر جيداً أن هذه المتساوية تتحقق فقط عند الاحتكاك النهائى .

أى عندما يكون الجسم على (وشك الحركة أو متحركا بالفعل)، وعلى ذلك يمكن كتابة المتباينة : $\boxed{\text{ح} \leqslant \text{م ر}}$

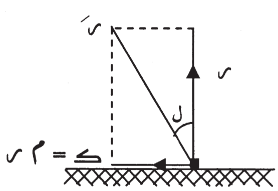
زاوية الاحتكاك :

ليكن ر َ مقدار رد الفعل المحصل ، هـ قياس الزاوية المحصورة بين هذه القوة وقوة رد الفعل العمودى كما هو موضح فى شكل (٤)



شكل (٤)

نلاحظ أن قيمة هـ تتزايد كلما تزايد مقدار قوة الاحتكاك – بفرض ثبات مقدار قوة رد الفعل العمودى ، وأن هذه القيمة تصل إلى نهايتها العظمى عندما يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى قيمته العظمى م ر ، أى عندما يصبح الاحتكاك نهائيا ، وتسمى الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل المحصل وقوة رد الفعل العمودى عندئذ ((بزاوية الاحتكاك)) وسنرمز لقياسها بالرمز (ل) شكل (٥)



شكل (٥)

وعلى ذلك ، فإن :

$$\text{ظا ل} = \frac{\text{ك}}{\text{ر}} = \text{م}$$

أى أن :

((ظل زاوية الاحتكاك يساوى معامل الاحتكاك))

قوة رد الفعل المحصل :

مقدار قوة رد الفعل المحصل ($ر'$) هى مقدار محصلة كل من مقدارى قوة الاحتكاك

وقوة رد الفعل العمودى أى أن : $ر' = \sqrt{ر^2 + ح^2}$

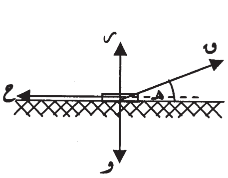
وعندما يكون الاحتكاك نهائياً نجد أن :

$\therefore ر' = \sqrt{ر^2 + ك^2}$

$= \sqrt{ر^2 + م^2 ر^2} = ر \sqrt{1 + م^2}$

اتزان جسم على مستوى أفقى خشن :

نعتبر جسما متزنا على مستوى أفقى خشن وتؤثر عليه قوة مقدارها ق وتميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها هـ كما هو موضح فى شكل (٦) .



شكل (٦)

القوة المؤثرة على الجسم :

١- قوة الوزن $\overleftarrow{و}$ هى موجهة رأسيا لأسفل و ليكن مقدارها و .

٢- القوة المعطاة $\overleftarrow{ق}$ ومقدارها ق .

٣- قوة رد الفعل المحصل الناتجة عن تأثير المستوى على الجسم ويمكن تحليلها إلى مركبتين : قوة رد الفعل العمودى و هى موجهة رأسيا لأعلى ومقدارها ر وقوة الاحتكاك وهى موجهة فى عكس الاتجاه الذى يميل الجسم إلى التحرك فيه ومقدارها ح .

بتحليل القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاهين أحداهما هو اتجاه المركبة المماسية للقوة $\overleftarrow{ق}$ والآخر عمودى عليه .

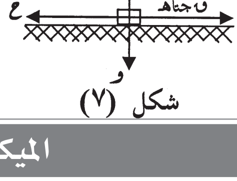
بما أن الجسم يميل إلى التحرك على المستوى تحت تأثير المركبة المماسية (ذات المقدار ق جتا هـ) .

للقوة $\overleftarrow{ق}$ ، فإن قوة الاحتكاك تكون موجهة فى عكس اتجاه هذه المركبة كما يبين شكل (٧) .

ويكتب شرطا الاتزان كالآتى :

ح = ق جتا هـ

ر + ق جا هـ = و



شكل (٧)

تحدد هاتان العلاقتان مقدارى قوة رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك وحتى يظل الجسم ملامسا للمستوى يجب ألا تتلاشى قوة رد الفعل العمودى أى يكون ر > ٠

∴ و > ق جا هـ

و إذا كان الجسم على وشك الحركة تحت تأثير المركبة المماسية للقوة ق فإن الاحتكاك يكون نهائيا وتظل العلاقات السابقة صحيحة مع أخذ ع = ك

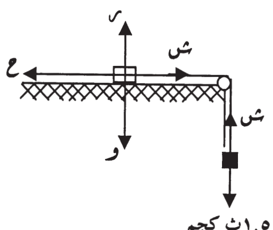
و إذا كانت القوة ق أفقية ، فإننا نضع هـ = ٠ ، فى العلاقات السابقة .

مثال (١) :

وضعت كتلة خشبية مقدار وزنها ٦ ث كجم على نضد أفقى وربطت بخيط أفقى يمر على بكرة ملساء مثبتة عند حافة النضد و يتدلى من طرفه ثقل مقداره ١,٥ ث كجم . فإذا كانت الكتلة الخشبية متزنة على النضد عين قوة الاحتكاك وقوة رد الفعل العمودى . وإذا علم أن معامل الاحتكاك بين الكتلة والنضد يساوى $\frac{١}{٣}$ ، هل يكون الجسم على وشك الحركة .

الحـل :

القوة التى تعمل تحريك الكتلة الخشبية على النضد هى قوة الشد فى الخيط الأفقى ومقدارها ١,٥ ث كجم وتكون قوة الاحتكاك فى الاتجاه المضاد لقوة الشد هذه كما يبين شكل (٨) .



شكل (٨)

بأخذ ش = ١,٥ ث كجم ، هـ = ٠° فى العلاقات السابقة نجد :

ع = ١,٥ × جتا ٠° = ١,٥ ث كجم .

ر + ١,٥ جا ٠° = ٦ ث كجم .

∴ ر = ٦ ث كجم .

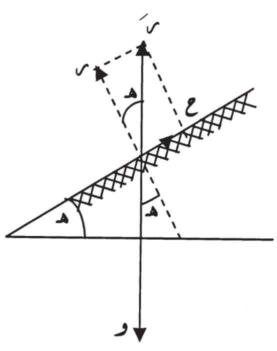
لمعرفة ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا ، نعين أقصى قيمة ممكنة لمقدار قوة الاحتكاك وهى م ر :

∴ م ر = $\frac{١}{٣}$ × ٦ = ٢ ث كجم .

∴ ع < م ر .

إذن فالاحتكاك غير نهائى ولا تكون الكتلة الخشبية على وشك الحركة على النضد .

اتزان جسم على مستوى مائل خشن :



شكل (٩)

نعتبر جسما متزنا على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ .

يتزن الجسم على المستوى تحت تأثير قوتين :

١- قوة وزنه و تعمل رأسيا لأسفل و ليكن مقدارها و .

٢- قوة رد الفعل المحصل و ليكن مقدارها رَ من شرط الاتزان ينتج أن

قوة رد الفعل المحصل تعمل رأسيا لأعلى ويكون : رَ = و (١)

يمكن الآن تعيين قوتى الاحتكاك ورد الفعل العمودى بسهولة باعتبارهما مركبتى قوة رد الفعل المحصل فى اتجاهين أحدهما يوازى المستوى والآخر عمودى عليه كما فى الشكل (٩) .

قوة الاحتكاك :

ع + ر َ جا هـ = و جا هـ (٢)

و تعمل هذه القوة على معاكسة الحركة المحتملة ، أى أنها توازى خط أكبر ميل و تكون موجهة لأعلى المستوى .

قوة رد الفعل العمودى :

ر + ر َ جتا هـ = و جتا هـ (٣)

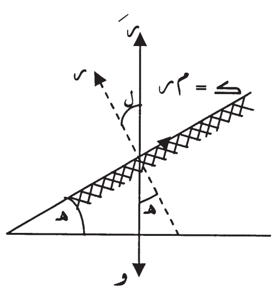
و إذا كان الجسم على وشك الانزلاق ، فإن القاعدة الآتية تتحقق :

قاعـدة :

إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قيـاس زاوية ميل المستوى على الأفقى .

البرهان

بما أن الاحتكاك نهائى ، فإن قوة رد الفعل المحصل تصنع ، مع العمودى على المستوى زاوية قياسها يـساوى قيـاس زاوية الاحتكاك وليكن قياسها ل .



شكل (١٠)

مما سبق و بالرجوع إلى شكل (١٠) ينتج أن :

هـ = ل

كما يمكن صياغة هذه المتساوية بدلالة معامل الاحتكاك كالآتى :

$\boxed{\text{ظا ل = م}} \Leftarrow \boxed{\text{م = ظا هـ}}$

تجربة (١) :

تعيين معامل الاحتكاك بين سطحين متلامسين باستخدام المستوى المائل .

الغرض من التجربة :

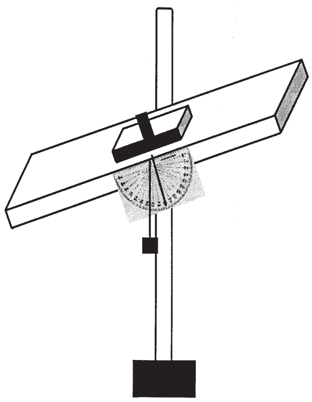
تعيين معامل الاحتكاك بين سطحين متلامسين معلومين باستخدام المستوى المائل .

الأدوات اللازمة :

مستوى خشن – كتلة خشبية أحد أوجهها مستوى والوجه المقابل به حفرة مستطيلة الشكل . حامل كابستان بماسك – محور ارتكاز – منقلة – خيط رصاص .

إجراء التجربة :

١- اربط محور الارتكاز بماسك الحامل وثبت فيه المستوى .



شكل (١١)

٢- ثبت المنقلة فى المستوى بحيث ينطبق قطرها على حافة المستوى كما فى الشكل .

٣- علق خيط الرصاص من مسمار عند مركز المنقلة ويراعى أن يمر الخيط بمنتصف تدريج المنقلة عندما يكون المستوى أفقيا .

٤- اجعل المستوى فى وضع أفقى وضع عليه الكتلة الخشبية بوجهها المستوى ثم ضع ثقلاً مناسباً فى الحفرة .

٥- أمل المستوى تدريجيا حتى تبدأ الكتلة فى الانزلاق عند طرقها طرقا خفيفا .

٦- اقرأ تدريج المنقلة عند نقطة انطباق الخيط عليها ومن ذلك أوجد قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى و ليكن ى .

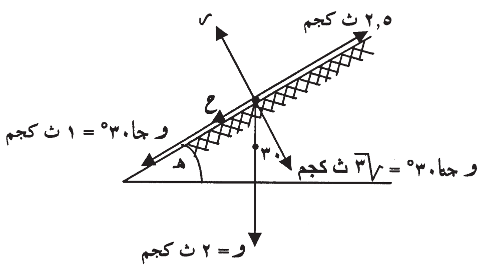
٧- كرر التجربة عدة مرات مع تغيير الثقل الموضوع فى الحفرة وتعيين قياس زاوية ميل المستوى فى كل مرة . و سيلاحظ أن هذه الزوايا تكون متساوية القياس على وجه التقريب .

٨- خذ متوسط هذه القياسات فيكون هو قياس زاوية الاحتكاك .

٩- أوجد ظل هذه الزاوية فيكون هو معامل الاحتكاك بين السطحين .

مثال (٢) :

يتزن لوح من الخشب وزنه ٢ ث كجم على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين اللوح يساوى ٠,٩ تحت تأثير قوة ٢,٥ ث كجم تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى . أوجد مقدار قوة الاحتكاك وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا ؟



شكل (١٢)

الحل :

القوة المماسية التى تعمل على تحريك الجسم على المستوى هى :

١- المركبة المماسية للوزن وتعمل فى خط أكبر ميل لأسفل

و مقدارها = و جا ٣٠° = ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ١ ث كجم

٢- القوة المعطاة وتعمل فى خط أكبر ميل للمستوى لأعلى

ومقدارها ٢,٥ ث كجم

و لما كان مقدار القوة الثانية أكبر من مقدار القوة الأولى ، فإن الجسم يميل إلى التحرك على خط أكبر ميل للمستوى لأعلى ، وبالتالى يجب أن تعمل قوة الاحتكاك فى هذا الخط ولأسفل كما يبين الشكل (١٢) .

$\because$ الجسم متزن

$\therefore$ ٢,٥ = ع + ١ $\qquad$ $\therefore$ ع = ١,٥ ث كجم

أيضا

ر = و جتا٣٠° = ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\sqrt{٣}$ ث كجم = ١,٧٣٢ ث كجم

لمعرفة ما إذا كان الاحتكاك نهائيا أولاً : نحسب أقصى قيمة ممكنة لقوة الاحتكاك

م ر = ٠,٩ × ١,٧٣٢ = ١,٥٥٩ ث كجم .

ع < م ر أى أن الاحتكاك غير نهائى و لا يكون الجسم على وشك الحركة .

مثال (٣) :

جسم وزنه ٧٦ نيوتن يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه إذا وضع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{١}{٤}$ فإذا وضع هذا الجسم على مستوى أفقى فى نفس خشونة المستوى المائل وأثرت فيه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقى زاوية جيبها $\frac{٣}{٥}$ ، وتقع فى مستوى رأسى فجعلته على وشك الحركة . أوجد مقدار هذه القوة ومقدار رد الفعل العمودى .

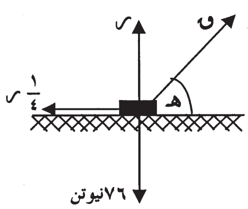
الحـــل :

معامل الاحتكاك = ظل زاوية ميل المستوى على الأفقى = $\frac{١}{٤}$

∵ الجسم على وشك الحركة على المستوى الأفقى .

∴ الاحتكاك يكون نهائيا و يساوى $\frac{١}{٤}$ ر

و بالتحليل فى اتجاهى المستوى و العمودى عليه :

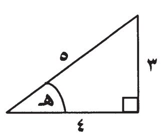


شكل (١٣)

ق جتا هـ = $\frac{١}{٤}$ ر

ق × $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{١}{٤}$ ر

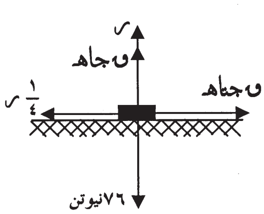
∴ ر = $\frac{١٦}{٥}$ ق .... (١)



∵ ر + ق جا هـ = ٧٦

∴ ر + ق × $\frac{٣}{٥}$ = ٧٦

ر = ٧٦ − $\frac{٣}{٥}$ ق .... (٢)



شكل (١٤)

و بالتعويض من (١) فى (٢)

$\frac{١٦}{٥}$ ق = ٧٦ − $\frac{٣}{٥}$ ق

$\frac{١٩}{٥}$ ق = ٧٦ ق = ٢٠ نيوتن ر = $\frac{١٦}{٥}$ × ٢٠ = ٦٤ نيوتن

مثال (٤) :

وضع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ثم شد الجسم إلى أعلى بواسطة خيط واقع فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل وفى اتجاه يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع المستوى .

فإذا كان معامل الاحتكاك يساوى $\frac{١}{٤}$ فبرهن على أن أقل قيمة للشد فى الخيط تمنع الجسم من الحركة إلى أسفل المستوى تساوى ١٥,٣ نيوتن تقريبا .

الحل :

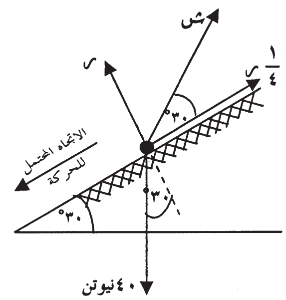
حيث أن الجسم على وشك الحركة إلى أسفل المستوى فإن الاحتكاك يكون نهائيا ويعمل إلى أعلى المستوى وتكون القوى المؤثرة على الجسم كما فى شكل (١٥) هى :

١- الوزن ٤٠ نيوتن رأسيا إلى أسفل .

٢- رد الفعل العمودى ر عموديا على المستوى .

٣- الاحتكاك النهائى $\frac{١}{٤}$ ر إلى أعلى المستوى .

٤- الشد فى الخيط ش يميل بزاوية قياسها ٣٠° على المستوى ويكون هو أقل شد يمنع الجسم من الانزلاق .



شكل (١٥)

و بالتحليل فى اتجاهى المستوى والعمودى عليه نجد من شروط الاتزان أن :

$$\frac{١}{٤}\text{ر} + \text{ش جتا}٣٠° - ٤٠\text{جا}٣٠° = ٠ \qquad (١)$$

$$\text{ر} + \text{ش جتا}٦٠° - ٤٠\text{جتا}٣٠° = ٠ \qquad (٢)$$

بضرب (١) فى ٤ وطرح (٢) من المعادلة الناتجة نجد أن :

$$٤\text{ش جتا}٣٠° - \text{ش جتا}٦٠° = ١٦٠\text{جا}٣٠° - ٤٠\text{جتا}٣٠°$$

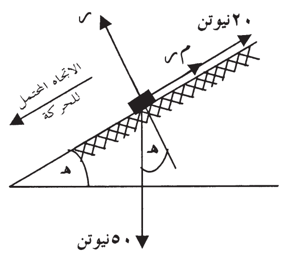
$$\text{ش}\left(٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\right) = ١٦٠ \times \frac{١}{٢} - ٤٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

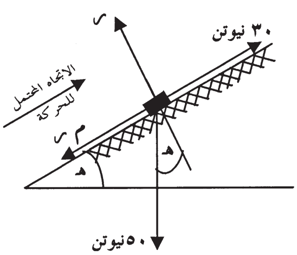
$$\text{ش} = \frac{٨٠ - ٢٠\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٣} - \frac{١}{٢}} = \frac{٤٥,٣٦}{٢,٩٦٤} = ١٥,٣ \text{ نيوتن تقريبا}$$

مثال (٥) :

وضع جسم مقدار وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى خشن تؤثر عليه قوة مقدارها ق فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى . فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما ق =٣٠ نيوتن وتكون على وشك الحركة إلى أسفل عندما ق = ٢٠ نيوتن فأوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى .

الحل :





شكل (١٦)

(أولاً) عندما ق = ٣٠ نيوتن يكون الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى ويكون الاحتكاك نهائيا ويعمل إلى أسفل المستوى .

وبالتحليل فى اتجاهى المستوى والعمودى عليه نجد من شروط الاتزان أن :

ر = ٥٠ جتا هـ (١) ٣٠ = م ر + ٥٠ جا هـ (٢)

(ثانياً) عندما ق = ٢٠ نيوتن يكون الجسم على وشك الحركة إلى أسفل المستوى ويكون الاحتكاك نهائيا ويعمل إلى أعلى مستوى .

و بالتحليل فى اتجاهى المستوى والعمودى عليه نجد من شروط الاتزان أن :

ر = ٥٠ جتا هـ (٣) ٢٠ + م ر = ٥٠ جا هـ (٤)

بجمع (٢) ، (٤) ٥٠ = ١٠٠ جا هـ $\Leftarrow$ جا هـ = $\frac{١}{٢}$ $\Leftarrow$ هـ = ٣٠°

و بالتعويض فى (١) ر = ٥٠ جتا ٣٠° = ٥٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن

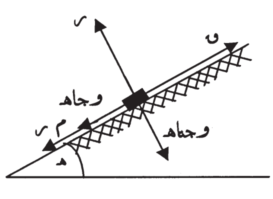
و بالتعويض فى (٢) ٣٠ = م × ٢٥ $\sqrt{٣}$ + ٥٠ × $\frac{١}{٢}$

٥ = ٢٥ م $\sqrt{٣}$ $\Leftarrow$ م = $\frac{١}{٥\sqrt{٣}}$ $\therefore$ م = $\frac{\sqrt{٣}}{١٥}$

مثال (٦) :

وضع جسم مقدار وزنه و على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فوجد أنه على وشك الانزلاق أثبت أن أقل قوة توازى خط أكبر ميل للمستوى وتجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى تساوى ٢ و جاى أثبت أيضا أن مقدار رد الفعل المحصل يساوى و .

الحـل :



شكل (١٧)

م = ظا هـ .... (١)

وبالتحليل فى اتجاهى المستوى والعمودى عليه وكتابة شرطى الاتزان :

ر = و جتا هـ .... (٢)

ق = م ر + و جا هـ .... (٣)

و بالتعويض من (١) ، (٢) ، (٣)

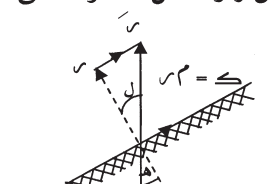
$\therefore$ ق = ظا هـ × و جتا هـ + و جا هـ

= $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ × و جتا هـ + و جا هـ = و جا هـ + و جا هـ = ٢ و جا هـ

لحساب مقدار رد الفعل المحصل نلاحظ أن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى : ل = هـ

$\therefore$ $\frac{\text{ر}}{\text{رَ}}$ = جتال

$\therefore$ رَ = $\frac{\text{ر}}{\text{جتا ل}}$ = $\frac{\text{ر}}{\text{جتا هـ}}$ = $\frac{\text{و جتا هـ}}{\text{جتا هـ}}$ = و



شكل (١٨)

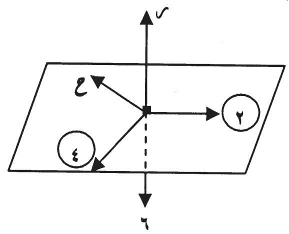
مثال (٧) :

وضع جسم مقدار وزنه ٦ نيوتن على مستوى أفقى خشن وأثرت على الجسم فى نفس المستوى قوتان مقدارهما ٢ ، ٤ نيوتن تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° فظل الجسم ساكناً .

اثبت أن قياس زاوية الاحتكاك (ل) بين الجسم والمستوى يجب ألا يقل عن ٣٠° .

وإذا كان ق (∠ل) = ٤٥° ، وبقى اتجاه القوتين ثابتاً ، كما بقيت القوة ٤ نيوتن دون تغيير ، فعين أصغر مقدار للقوة الأخرى لكى يتحرك الجسم ، وعين أيضا الاتجاه الذى يوشك الجسم أن يبدأ الحركة فيه .

الحـل :



شكل (١٩)

القوى المؤثرة على الجسم هى :

(١) مقدار وزنه ٦ نيوتن رأسيا إلى أسفل

(٢) مقدار رد الفعل ر العمودى على المستوى

(٣) قوتان مقدارهما ٢ ، ٤ نيوتن وتعملان فى نفس المستوى وبينما زاوية قياسها ١٢٠°

(٤) قوة الاحتكاك مقدارها ع وتقع فى المستوى الأفقى لأنه عمودى على $\overleftarrow{ر}$ كما فى شكل (١٩) .

∵ مجموع المركبات الجبرية للقوى فى الاتجاه العمودى على المستوى = صفراً ∴ ر = ٦ نيوتن

لدينا ثلاث قوى مقاديرها ٢، ٤، ع واقعة فى مستوى واحد ومتزنة فتكون ع مساوية ومضادة لمحصلة القوتين٢، ٤نيوتن

$$ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢\, ق_١\, ق_٢ \ \text{جتا}\ هـ}$$

$$= \sqrt{(٢)^٢ + (٤)^٢ + ٢ \times ٢ \times ٤ \ \text{جتا}\ ١٢٠°}$$

$$= \sqrt{٤ + ١٦ - ٨} = ٢\sqrt{٣} \text{ نيوتن}$$

نفرض أن م معامل الاحتكاك بين الجسم و المستوى ، ∵ <u>ع قوة احتكاك غير نهائى</u>

$$∴ م\, ر \geqslant ع \qquad ∴ م \times ٦ \geqslant ٢\sqrt{٣} \qquad ∴ م \geqslant \frac{\sqrt{٣}}{٣} \qquad ∴ \text{ظا ل} \geqslant \text{ظا } ٣٠°$$

∴ ل يجب ألا تقل عن ٣٠°

عندما $م = \text{ظا } ٤٥° = ١ \quad \Leftarrow \quad ك = م\, ر = ١ \times ٦ = ٦ \quad ، \quad ق_١ = ٤$

$$∴ (٦)^٢ = (٤)^٢ + ق_٢^٢ + ٢ \times ٤ \times ق_٢ \ \text{جتا}\ ١٢٠°$$

$$ق_٢^٢ - ٤\, ق_٢ - ٢٠ = ٠ \qquad ∴ ق_٢ = \frac{٤ \pm \sqrt{١٦ + ٨٠}}{٢} \qquad ق_٢ = ٢\,(١ + \sqrt{٦}) \text{ نيوتن}$$

و حيث أن اتجاه الاحتكاك يكون فى عكس اتجاه الحركة المحتملة فإن الاتجاه الذى يوشك أن يتحرك فيه الجسم هو فى عكس اتجاه ع أى فى الاتجاه الذى يميل على ق١ بزاوية قياسها هـ حيث :

$$\text{ظا هـ} = \frac{ق_٢ \ \text{جا}\ ١٢٠°}{ق_١ + ق_٢ \ \text{جتا}\ ١٢٠°} = \frac{٢\,(١ + \sqrt{٦}) \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{٤ - ٢\,(١ + \sqrt{٦}) \times \frac{١}{٢}} = \frac{١ + \sqrt{٦}}{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}} \quad \Leftarrow \quad هـ = ٤٤' \ ٨٤°$$

تمـــارين (١)

١- جسم مقدار وزنه ٢٤٠ ث كجم موضوع على مستوى أفقى خشن ويراد شده بحبل يميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا كان معامل الاحتكاك يساوى ٠,٣ فأوجد أقل مقدار للشد يلزم ليجعل الجسم على وشك الحركة مقرباً لرقمين عشريين .

٢- وضع جسم مقدار وزنه ٣ نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين الجسم يساوى $\frac{٢}{٣}$ أثرت على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى و لأعلى ومقدارها ٢ نيوتن . فـــإذا كان الجسم متزنا ، عين قوة الاحتكاك وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا .

٣- وضع جسم مقدار وزنه ٤ نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكاك بينه وبين الجسم يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ أثرت على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى و مقدارها $\frac{١}{٢}$ نيوتن ، فإذا كان الجسم متزنا ، عين قوة الاحتكاك و بين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا .

٤- جسم مقدار وزنه ٣٨ نيوتن يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه إذا وضع على مستوى مائل خـــشن يميـــل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{١}{٥}$ فإذا وضع هذا الجسم على مستوى أفقى فى نفس خشونة المستوى المائل وأثرت فيـــه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقى زاوية جيبها $\frac{٤}{٥}$ فجعلته على وشك الحركة.أوجد مقدار هذه القوة ومقـــدار رد الفعل العمودى ومقدار رد الفعل المحصل .

٥- وضع جسم مقدار وزنه ١٩٠ نيوتن على مستوى مائل ظل زاوية ميله على الأفقى هى $\frac{٥}{١٢}$ ومعامل الاحتكـــاك بينه وبين الجسم يساوى $\frac{١}{٢}$. أوجد مقدار أقل قوة أفقية واقعة على المستوى الرأسى المار بخط أكـــبر ميـــل فى المستوى المعلوم التى تجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى .

٦- وضع جسم مقدار وزنه ٣٠ نيوتن على مستوى مائل خشن . لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا أريد زيادة ميل المستوى إلى ٦٠° . فأوجد مقدار أقـــل قوة تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر ميل فى المستوى .

(أولاً) لتمنعه من الانزلاق .

(ثانيا) لتجعله على وشك الحركة إلى أعلى المستوى .

٧- وضع جسم مقدرا وزنه ٢ ث كجم على مستوى أفقى خشن ثم أميل المستوى بالتدريج فأوشـــك الجـــسم علـــى الانزلاق عندما أصبحت زاوية ميل المستوى على الأفقى قياسها ٣٠° برهن على أن معامل الاحتكاك يساوى $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ و إذا ربط الجسم عندئذ فى خيط يقع فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل وشد الخيط فى اتجاه يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° حتى أوشك الجسم على الحركة إلى أعلى المستوى فأوجد مقدار قوة الشد وبرهن علـــى أن مقدار قوة الاحتكاك يساوى $\frac{١}{٢}$ ث كجم .

٨- وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها يساوى $\frac{٤}{٣}$ فإذا كـــان $ق_١$ هو مقدار أقل قوة موازية لخط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى و تمنع الجسم من الانزلاق لأسفل ، $ق_٢$ هو مقدار أقل قوة أفقية تمنعه أيضا من الانزلاق لأسفل و كان $ق_١ = ق_٢$ فأوجد معامل الاحتكاك بين الجسم و المستوى و مقدار أى من القوتين .

٩- مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها يساوى $\frac{٥}{١٣}$. وضع عليه جسم مقـــدار وزنـــه ١٣٠ نيوتن وأثرت عليه قوة فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى . فإذا كان معامل الاحتكاك يساوى $\frac{٢}{٥}$ فأوجد النهايتين اللتين ينحصر بينهما مقدار القوة التى تجعله على وشك الحركة على المستوى .

١٠- جسم مقدار وزنه (و) موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ ، وقيـــاس زاويـــة الاحتكاك ل . أثرت على الجسم القوة $\overleftarrow{ق}$ فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى وتمنعه مـــن الانـــزلاق .

اثبت أن $ق = \frac{و \text{ جا}(هـ - ل)}{\text{جتا } ل}$.

١١- وضع جسم كتلته ٤ كجم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومعامل الاحتكـــاك بينه وبين المستوى $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ بين ما إذا كان الجسم يتزلق على المستوى أو يكون علـــى وشـــك الانـــزلاق أو أن الاحتكاك غير نهائى ، ثم أوجد مقدار واتجاه قوة الاحتكاك عندئذ . وإذا أثرت على الجسم قوة موازيـــة لخـــط أكبر ميل للمستوى فأوجد مقدار واتجاه هذه القوة :

(أولاً) ليكون الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى .

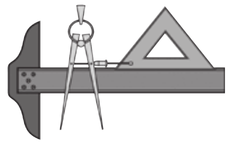
(ثانياً) ليكون الجسم على وشك الحركة إلى أسفل المستوى .

١٢- وضع جسم وزنه (و) على مستوى أفقى خشن وأثرت عليه فى نفس المستوى قوتان متعامدتان $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فبقى الجسم متزنا . أثبت أن معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى يجب ألا يقل عن $\frac{١}{و}\sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢}$

و إذا كانت $ق_٢ = \frac{١}{٢}$ و ، $م = ١$

وزيدت $ق_١$ تدريجيا إلى أن أصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد قيمة $ق_١$ عندئذ و عـــين الاتجـــاه الـــذى يوشك أن يبدأ الجسم الحركة فيه .

الفصل الثانى



العـــــزوم

■ مقدمة :

نتناول فى هذا الجزء مفهوم عزم قوة حول نقطة وطريقة حسابها وأيضًا طريقة حساب عزوم مجموعة من القوة حول نقطة.

■ الأهداف :

فى نهاية تدريس هذا الفصل ينبغى أن يكون الطالب قادرًا على أنه :

١- يوجد عزم قوة بالنسبة لنقطة .

٢- يعين الزاوية المحصورة بين $\overrightarrow{ر}$ ، $\overrightarrow{ق}$ عند حساب عزم القوة بالنسبة لنقطة .

٣- يعين معيار واتجاه عزم قوة بالنسبة لنقطة .

٤- يحسب عزوم القوى المستوية بالنسبة لنقطة واقعة فى مستويها .

٥- يوجد مجموع عزوم عدة قوى متلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ .

٦- يحل مسائل حياتية على العزوم .

● الموضوعات :

(١) حاصل الضرب القياسى لمتجهين .

(٢) حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين .

(٣) عزم قوة بالنسبة لنقطة .

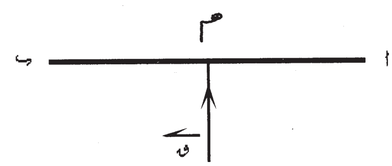
(٤) عزوم القوى المستوية .

العـــــــــــزوم

يختلف تأثير القوى على الأجسام المتماسكة عن تأثيرها على النقطة المادية .

فعند تأثير قوة على نقطة مادية . تنتقل الأخيرة فى اتجاه القوة (ما لم تكن واقعة تحت تأثير قوة أخرى) . أما إذا أثرت قـوة على جسم مـتماسك (ويحتل حيـزا محدودا وغـير صفرى من الفراغ) فإنها تكسبه حركة قد تختلف فى بساطتها أو تعقيدها تبعا لشكل الجسم . وتبعا لنقطة تأثير القوى عليه .

ويمكن للطالب أن يتحقق من تباين الحركات الممكنة للجسم المتماسك تحت تأثير قوة معطاة من خلال التحربة وعلى سبيل المثال إذا وضعنا قضيبا منتظما أ ب على نضد أفقى وأثرنا عليه بقوة عمودية فى مستوى النضد وعند منتصفه م كما فى شكل (٣٥ -أ) فإننا نلاحظ أن القضيب يتحرك على النضد بحيث يظل طول الوقت موازيا لنفسه .



شكل (٣٥ - أ)

شكل (٣٥ - ب)

وتسمى مثل هذه الحركة «حركة انتقال صرفة» نعيد التجربة بعد تثبيت الطرف ب من القضيب فى مفصله مثبتة فى النضد وتسمح للقضيب بالدوران حولها ، فنلاحظ أن القضيب يبدأ فى الدوران حول ب تحت تأثير القوة ق ، تسمى مثل هذه الحركة «حركة دورانية صرفة» .

نرفع الآن المفصلة ونعيد القضيب إلى النضد كما كان أولا ثم نكرر التجربة مرة ثالثة مع نقل نقطة تأثير القوة إلى طرف القضيب أ ومع الاحتفاظ باتجاهها عموديا على القضيب كما فى شكل (٣٥ - ب) .

نلاحظ أن القضيب يكتسب حركة هى مزيج من الانتقال والدوران .

ولكن .. دعنا الآن ندقق النظر فى مقدرة القوة على إحداث حركة دورانية للجسم .

من أجل ذلك .. نعود مرة أخرى إلى القضيب الموضوع على النضد وسيفرض الآن أن القضيب ثبت فى النضد من طرفه ب بمفصلة تسمح له بالدوران حولها فى مستوى النضد بإدخال المفصلة عند ب نكون قد ألغينا الحركة الانتقالية للقضيب واحتفظنا فقط بالحركة الدورانية حول ب .

نلاحظ الآن أن القوة تكون أكثر قدرة على إدارة القضيب عندما تكون نقطة تأثيرها عند أ ، ى أبعد ما يكون عن المفصلة التى يحدث حولها الدوران ، عنها فى أى وضع آخر ، وأن مقدرتها ذه تتضاءل كلما جعلنا نقطة تأثيرها تقترب من ب .

وفى النهاية عندما تؤثر القوة عند ب فإن القضيب لا يتحرك على الإطلاق . أيضًا ، نلاحظ نه كلما ازداد معيار القوة (مع تثبيت نقطة تأثيرها فى القضيب) ازدادت مقدرتها على إدارة لقضيب .

يبدو إذن أن هناك عاملين يتحكمان فى مقدرة القوة على إحداث دوران القضيب حول طرفه ب .

١- معيار (أو مقدار) القوة .

٢- بعد نقطة تأثيرها عن مفصلة الدوران .

نوضح فيما يلى أن هناك كمية متجهة - تسمى عزم القوة بالنسبة لنقطة - تحدد مدى قدرة لقوة على إحداث دوران للجسم الذى تؤثر عليه .

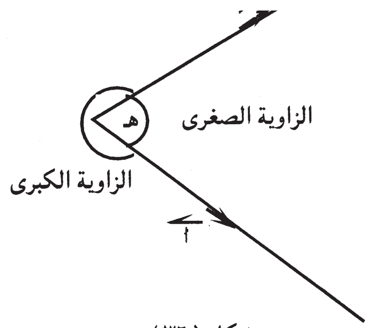
وقبل أن نعطى التعريف الدقيق لعزم القوة ، علينا أن نبدأ باستكمال معلوماتنا عن جبر لمتجهات بتعريف نوعين من حواصل ضرب متجهين هما :

حاصل الضرب القياسى لمتجهين ، وحاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين .

ليكن $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين

أ = || $\overleftarrow{\text{أ}}$ || ، ب = || $\overleftarrow{\text{ب}}$ || ،

هـ قياس الزاوية الصغرى التى يحصرها هذان المتجهان عند رسمهما خارجين من نقطة واحدة أو داخلين إلى نفس النقطة كما فى شكل (٣٦) .



شكل (٣٦)

فيعرف حاصل الضرب القياسى للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}}$.

كما يلى : $\boxed{\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \text{أ ب حتا هـ}}$

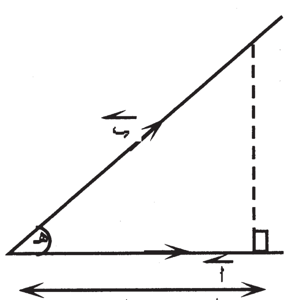
ملاحظة (١) : $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} \odot \overleftarrow{\text{أ}}$

ملاحظة (٢) : $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{0} = \overleftarrow{0} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{0} \odot \overleftarrow{0} =$ صفر

المسقط الجبرى أو المركبة الجبرية لمتجه فى اتجاه آخر :

يعرف المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ (ونقول أحيانا المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ على المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$) على أنه الكمية القياسية ب حتا هـ

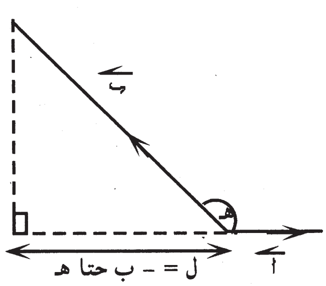
ويلاحظ أن المسقط الجبرى يكون موجبا إذا كانت الزاوية حادة (شكل ٣٧ أ) .



شكل (٣٧ - أ)

وسالبا إذا كانت الزاوية منفرجة شكل (٣٧ -ب)

ب) أما إذا كانت الزاوية قائمة فأن المسقط الجبرى (المركبة الجبرية) يساوى الصفر .



شكل (٣٧ - ب)

ويلاحظ أن :

$\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \text{أ}\ (\text{ب حتا هـ}) = \text{ب}\ (\text{ أ حتا هـ})$.

أى أن حاصل الضرب القياسى لمتجهين غير صفريين يساوى حاصل ضرب معيار أى منهما فى المسقط الجبرى للآخر عليه .

نظرية (١) :

حاصل الضرب القياسى لأى متجه فى نفسه يساوى مربع معياره .

أى أنه لأى متجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ تتحقق العلاقة $\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{أ}} = \text{أ}^{٢}$

نتيجة :

إذا كان $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجهى وحدة متعامدين فإن :

$\overleftarrow{\text{س}} \odot \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ص}} \odot \overleftarrow{\text{ص}} = ١$

، $\overleftarrow{\text{س}} \odot \overleftarrow{\text{ص}} = \text{صفرا}$

نظرية (٢) :

لأى متجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ولأى كمية قياسية م تتحقق العلاقة .

$(\text{م}\ \overleftarrow{\text{أ}}) \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{أ}} \odot (\text{م}\ \overleftarrow{\text{ب}}) = \text{م}\ (\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}})$

نظرية (٣) :

لأى ثلاث متجهات $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ تتحقق خاصية التوزيع .

$(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) \odot \overleftarrow{\text{جـ}} = \overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{جـ}} + \overleftarrow{\text{ب}} \odot \overleftarrow{\text{جـ}}$

ملحوظة :

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١})$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{س}_{٢} ، \text{ص}_{٢})$ فإن :

$\overleftarrow{\text{أ}} \odot \overleftarrow{\text{ب}} = \text{س}_{١}\,\text{س}_{٢} + \text{ص}_{١}\,\text{ص}_{٢}$

التحليل المتعامد لمتجه باستخدام حاصل الضرب القياسى لمتجهين :

يمكن إجراء تحليل متجه فى اتجاهين متعامدين باستخدام حاصل الضرب القياسى لمتجهين كالآتى :

نعتبر على سبيل المثال متجه القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ ونفرض أننا رغبنا فى تحليل هذا المتجه فى اتجاهى محورين متعامدين $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ليكن $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجهى الوحدة فى اتجاهى $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ على الترتيب (شكل ٣٨) ، هـ قياس الزاوية التى يصنعها المتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ مع متجه الوحدة $\overleftarrow{\text{س}}$.

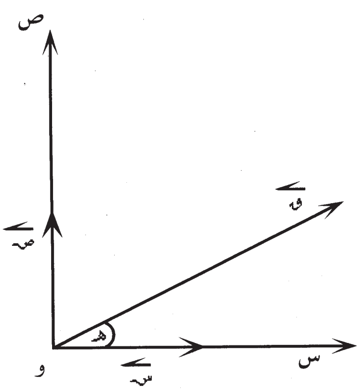
نعرف أن تحليل المتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاهى $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ يكتب على الصورة :

$$\overleftarrow{\text{ق}} = (\text{ق جتا هـ})\ \overleftarrow{\text{س}} + (\text{ق جا هـ})\ \overleftarrow{\text{ص}}$$

حيث $\text{ق} = \|\overleftarrow{\text{ق}}\|$

ولكن $\text{ق جتا هـ} = \overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{س}}$

، $\text{ق جا هـ} = \text{ق جتا}\ (٩٠^\circ - \text{هـ}) = \overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{ص}}$



شكل (٣٨)

وبالتالى يكتب متجه القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى التحليل المتعامد على الصورة .

$$\boxed{\overleftarrow{\text{ق}} = (\overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{س}})\ \overleftarrow{\text{س}} + (\overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{ص}})\ \overleftarrow{\text{ص}}}$$

تبين العلاقة الأخيرة أن المركبة الجبرية للمتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{س}}$ تساوى $(\overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{س}})$ أى تساوى حاصل الضرب القياسى للمتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى متجه الوحدة فى الاتجاه الذى تحسب فيه المركبة .

وبصفة عامة ... إذا أردنا تحليل المتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاهين متعامدين أحدهما هو اتجاه متجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، فإن المركبة الجبرية للمتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$ تساوى حاصل الضرب القياسى للمتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$ ولكن متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}}$ هو : $\dfrac{\overleftarrow{\text{أ}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\|}$

$\therefore$ المركبة الجبرية للمتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{ق}} \odot \dfrac{\overleftarrow{\text{أ}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\|}$

ويلاحظ أن المركبة الجبرية للمتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ تساوى المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$.

مثال (٦) :

عين المركبة الجبرية للقوة $\overleftarrow{\text{ق}} = ٧\,\overleftarrow{\text{س}} + ٢٤\,\overleftarrow{\text{ص}}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ حيث أ = (١ ، ٢)، ب = (٤ ، ٦)

الحـــل

بالرجوع إلى شكل (٣٩)

$\overleftarrow{\text{و أ}} = \overleftarrow{\text{س}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}$

$\overleftarrow{\text{و ب}} = ٤\,\overleftarrow{\text{س}} + ٦\,\overleftarrow{\text{ص}}$

$\therefore\ \overleftarrow{\text{أ ب}} = \overleftarrow{\text{و ب}} - \overleftarrow{\text{و أ}}$

$= ٣\,\overleftarrow{\text{س}} + ٤\,\overleftarrow{\text{ص}}$

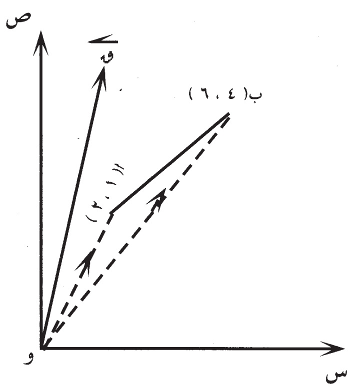
$\|\overleftarrow{\text{أ ب}}\| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$

المركبة الجبرية للقوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

$= \overleftarrow{\text{ق}} \odot \dfrac{\overleftarrow{\text{أ ب}}}{\|\overleftarrow{\text{أ ب}}\|}$

$= (٧\,\overleftarrow{\text{س}} + ٢٤\,\overleftarrow{\text{ص}}) \odot \dfrac{٣\,\overleftarrow{\text{س}} + ٤\,\overleftarrow{\text{ص}}}{٥}$

$= \dfrac{٢١ + ٩٦}{٥} = \dfrac{١١٧}{٥} = ٢٣,٤$



شكل (٣٩)

ثانيًا – حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين :

ليكن $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين ، أ = $\|\overleftarrow{\text{أ}}\|$ ، ب = $\|\overleftarrow{\text{ب}}\|$ ، هـ قياس الزاوية الصغرى التى يحصرها هذان المتجهان عند رسمهما خارجين من نقطة واحدة .

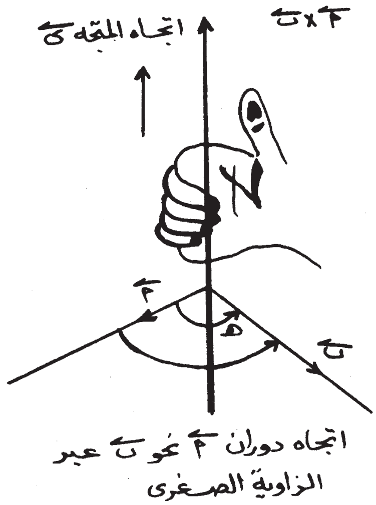
تعريف :

يعرف حاصل الضرب الاتجاهى للمتجه $\overleftarrow{أ}$ فى المتجه $\overleftarrow{ب}$ ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ كالآتى:

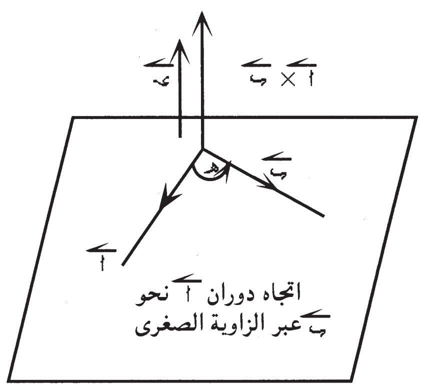
$$\boxed{\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = (أ\ ب\ جا\ هـ)\ \overleftarrow{ى}}$$

حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يجمع المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ويتحدد اتجاهه بقاعدة اليد اليمنى والتى تنص على الآتى :

إذا كانت الأصابع المنحنية لليد اليمنى تشير إلى دوران المتجه $\overleftarrow{أ}$ نحو المتجه $\overleftarrow{ب}$ عبر الزاوية الصغرى المحصورة بينهما فإن الإبهام يشير إلى اتجاه المتجه $\overleftarrow{ى}$ كما فى شكلى(٤٠-٤١).



شكل (٤١)



شكل (٤٠)

أما إذا كان أحد المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ أو كلاهما هو المتجه الصفرى .. فإن

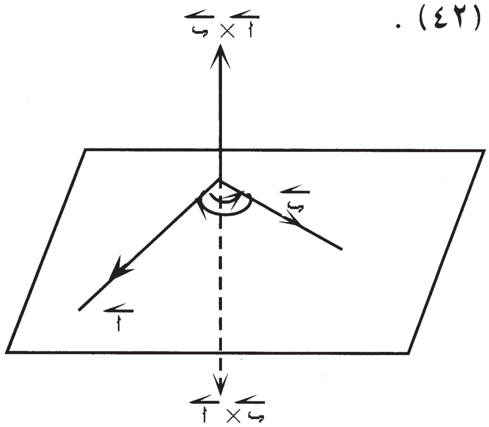
$$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{\cdot} = \overleftarrow{\cdot} \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{\cdot} \times \overleftarrow{\cdot} = \overleftarrow{\cdot}$$

ينتج من تعريف حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين خاصيتان هامتان :

خاصية (١) :

$$\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ} = -(\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب})$$

ويمكن إثبات هذه الخاصية بسهولة بملاحظة أنه عند تعيين اتجاه $\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ}$ يكون الدوران من $\overleftarrow{ب}$ نحو $\overleftarrow{أ}$ عبر الزاوية الصغرى شكل (٤٢) .



شكل (٤٢)

خاصية (٢) :

إذا توازى متجهان ، كان حاصل ضربهما الاتجاهى هو المتجه الصفرى تنتج هذه الخاصية بملاحظة أنه فى حالة توازى المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ يكون هـ = صفرْ أو هـ = ١٨٠° ، وفى الحالتين فإن حا هـ = صفر وعلى وجه الخصوص :

«حاصل الضرب الاتجاهى لأى متجه فى نفسه يساوى المتجه الصفرى» .

أى أن : $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{أ} = \overleftarrow{\cdot}$

كما يتميز حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين بخاصيتين أخريين ، نوردهما فى النظريتين الآتيتين ... ونعطى النظرية الثانية بدون برهان .

نظريــة (١) :

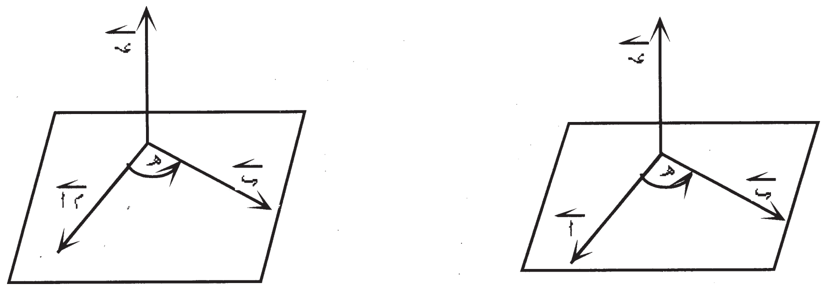
لأى متجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ولأى كمية قياسية م تتحقق الخاصية

$(م \overleftarrow{أ}) \times \overleftarrow{ب} = \overleftarrow{أ} \times (م \overleftarrow{ب}) = م \overleftarrow{(\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب})}$

البرهان : إذا كان أى من المتجهين $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ أو كلاهما هو المتجه الصفرى أو إذا كانت م = صفر، فإن النظرية تنتج مباشرة من تعريف حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين .

والآن نعتبر أن $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ متجهان غير صفريين ، م ≠ صفر هناك حالتان :

١- إذا كانت م > صفر ، فأن الزاوية الصغرى بين المتجهين م $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ تكون هى نفسها الزاوية الصغرى بين المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ (راجع النظرية المناظرة فى حالة حاصل الضرب القياسى لمتجهين) كما فى شكل (٤٣) .



شكل (٤٣)

فإذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ ب جا هـ})\ \overleftarrow{\text{ى}}$

حيث هـ قياس الزاوية الصغرى المحصورة بين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه الوحدة العمودى على المستوى الذى يجمع كلا من $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، والذى يتحدد اتجاهه بقاعدة اليد اليمنى ، فأن :

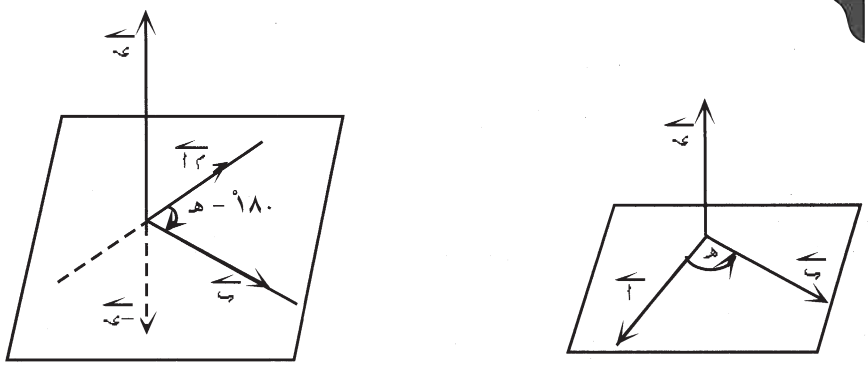
$(\text{م } \overleftarrow{\text{أ}}) \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{م أ ب حا هـ})\ \overleftarrow{\text{ى}}$

$= \text{م } (\text{أ ب حا هـ})\ \overleftarrow{\text{ى}}$

$= \text{م } (\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}})$

٢- إذا كانت م < صفر

فأن قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين م $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ يكون (180° - هـ) ويصبح اتجاه الدوران من م $\overleftarrow{\text{أ}}$ نحو $\overleftarrow{\text{ب}}$ عبر الزاوية الصغرى المحصورة بينهما مضادا لاتجاه الدوران من $\overleftarrow{\text{أ}}$ نحو $\overleftarrow{\text{ب}}$ عبر الزاوية الصغرى المحصورة بينهما (شكل ٤٤) ، أى أن اتجاه المتجه م $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$ يكون مضادا لاتجاه المتجه ($\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$) .



شكل (٤٤)

$$\therefore\ (\text{م}\ \overleftarrow{\text{أ}}) \times \overleftarrow{\text{ب}} = [\ |\text{م}|\ \text{أ ب حا}\ (١٨٠° - \text{هـ})]\ (-\ \overleftarrow{\text{ى}})$$

$$= -\ |\text{م}|\ (\text{أ ب حا هـ})\ \overleftarrow{\text{ى}}$$

$$= \text{م}\ (\text{أ ب حا هـ})\ \overleftarrow{\text{ى}}$$

$$= \text{م}\ (\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}})$$

لاثبات الجزء الثانى من النظرية نتبع نفس الخطوات كما فى الحالة الأولى .

نـظـريــة (٢) :

بدون برهان

لأى ثلاث متجهات $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ تتحقق خاصية التوزيع

$$(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) \times \overleftarrow{\text{جـ}} = \overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{جـ}} + \overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{جـ}}$$

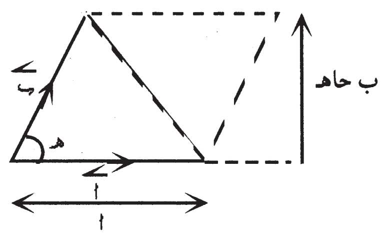
المعنى الهندسى لمعيار حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين :

نعتبر متجهين غير صفريين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ وليكن أ = $\|\overleftarrow{\text{أ}}\|$ ، ب = $\|\overleftarrow{\text{ب}}\|$ ، هـ قياس الزاوية الصغرى التى يحصرها هذان المتجهان عند رسمهما من نقطة واحدة .

من التعريف :

$$\|\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}\| = \text{أ ب حا هـ}$$

ونلاحظ أن هذه الكمية تساوى مساحة سطح متوازى الأضلاع المقام على القطعتين المستقيمتين الموجهتين الممثلتين للمتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ كضلعين متجاورين ، وتساوى أيضًا ضعف مساحة سطح المثلث المقام على هاتين القطعتين كضلعين متجاورين شكل (٤٥) .

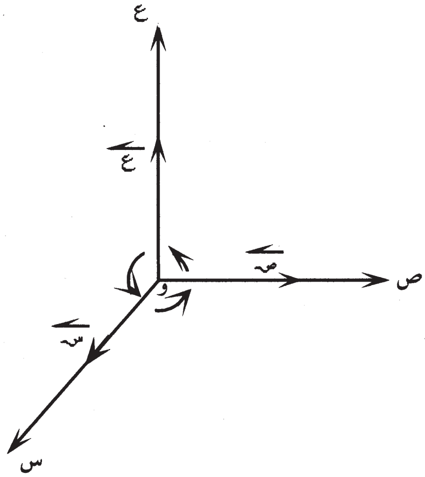


شكل (٤٥)

المجموعة اليمينية من متجهات الوحدة :

نفرض أن $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ اتجاهان متعامدان وأن $\overleftarrow{\text{سـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{صـ}}$ متجها الوحدة فى هذين الاتجاهين على الترتيب (شكل ٤٦) .

نرسم الاتجاه $\overleftarrow{\text{و ع}}$ عموديا على كل من $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ، وليكن $\overleftarrow{\text{ع}}$ متجه الوحدة فى هذا الاتجاه .



شكل (٤٦)

نحدد اتجاه $\overleftarrow{\text{و ع}}$ بحيث يحقق متجه الوحدة $\overleftarrow{\text{ع}}$ قاعدة اليد اليمنى عند دوران متجه الوحدة $\overleftarrow{\text{سـ}}$ نحو متجه الوحدة $\overleftarrow{\text{صـ}}$ عبر الزاوية القائمة المحصورة بينهما عند النقطة و(الزاوية الصغرى بين $\overleftarrow{\text{سـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{صـ}}$).

بالرجوع إلى شكل (٤٦) يتضح أن $\overleftarrow{\text{سـ}} \times \overleftarrow{\text{صـ}} = \overleftarrow{\text{ع}}$

وأيضًا : $\overleftarrow{\text{ص}} \times \overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{\text{س}}$

$$\overleftarrow{\text{ع}} \times \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ص}}$$

(لاحظ الترتيب الدورى فى العلاقات الثلاثة السابقة) .

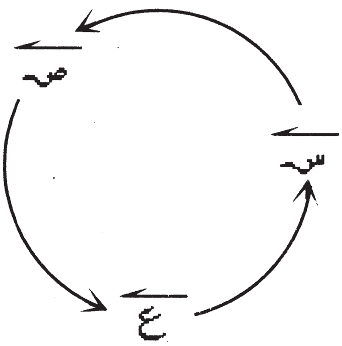
يقال عندئذ أن متجهات الوحدة { $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ } تكون مجموعة يمينية من متجهات الوحدة يلاحظ ترتيب المتجهات داخل القوسين ، ونقول :

الدوان من $\overleftarrow{\text{س}}$ نحو $\overleftarrow{\text{ص}}$ عبر الزاوية الصغرى يحدد اتجاه $\overleftarrow{\text{ع}}$.

الدوان من $\overleftarrow{\text{ص}}$ نحو $\overleftarrow{\text{ع}}$ عبر الزاوية الصغرى يحدد اتجاه $\overleftarrow{\text{س}}$.

الدوان من $\overleftarrow{\text{ع}}$ نحو $\overleftarrow{\text{س}}$ عبر الزاوية الصغرى يحدد اتجاه $\overleftarrow{\text{ص}}$.

ويرمز إلى ذلك بالشكل الدورى .



مركبات المتجه ($\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$) فى التحليل المتعامد :

لنفرض أن المتجهين $\overleftarrow{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ يكتبان فى التحليل المتعامد على الصورة $\overleftarrow{\text{أ}} = \text{أ}_1 \overleftarrow{\text{س}} + \text{أ}_2 \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = \text{ب}_1 \overleftarrow{\text{س}} + \text{ب}_2 \overleftarrow{\text{ص}}$

باستخدام النظريتين السابقتين وبالرجوع إلى شكل (٤٦) نجد :

$$\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_1 \overleftarrow{\text{س}} + \text{أ}_2 \overleftarrow{\text{ص}}) \times (\text{ب}_1 \overleftarrow{\text{س}} + \text{ب}_2 \overleftarrow{\text{ص}})$$

$$= (\text{أ}_1\text{ب}_1)\, \overleftarrow{\text{س}} \times \overleftarrow{\text{س}} + (\text{أ}_1\text{ب}_2)\, \overleftarrow{\text{س}} \times \overleftarrow{\text{ص}} + (\text{أ}_2\text{ب}_1)\, \overleftarrow{\text{ص}} \times \overleftarrow{\text{س}} + (\text{أ}_2\text{ب}_2)\, \overleftarrow{\text{ص}} \times \overleftarrow{\text{ص}}$$

$$= (\text{أ}_1\text{ب}_2)\, \overleftarrow{\text{ع}} + (\text{أ}_2\text{ب}_1)\,(-\, \overleftarrow{\text{ع}})$$

$$\therefore\ \overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_1\text{ب}_2 - \text{أ}_2\text{ب}_1)\, \overleftarrow{\text{ع}}$$

مثال (٧) :

بفرض أن { $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ } مجموعة يمنية . أوجد حاصل الضرب الاتجاهى للمتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ فى المتجه $\overleftarrow{\text{ب}}$ حيث :

$\overleftarrow{\text{أ}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ١٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$

وعين مساحة سطح المثلث المقام على القطعتين المستقيمتين الموجهتين الممثلتين لهذين المتجهين كضلعين متجاورين .

الحـــل

$\overleftarrow{\text{أ}}$ × $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٣ × ١٢ - ٤ × ٥) $\overleftarrow{\text{ع}}$

= ١٦ $\overleftarrow{\text{ع}}$

∴ مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ = ٨ وحدات مساحة .

تمـاريـــن (٢ - ١)

(١) أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٠سم ، عين حاصل الضرب القياسى للمتجهين $\overleftarrow{\text{ب د}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب أ}}$.

احسب كذلك المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{\text{ب د}}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$.

(٢) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٤٠ سم ، ب جـ = ٣٠سم ، عين المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{\text{ب د}}$ فى اتجاهى $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{د جـ}}$.

(٣) يراد تحليل قوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ إلى مركبتين $\overleftarrow{\text{ق}_١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_٢}$. فإذا كانت $\overleftarrow{\text{ق}_١}$ توازى متجها معطى $\overleftarrow{\text{ب}}$. بينهما $\overleftarrow{\text{ق}_٢}$ عمودية على $\overleftarrow{\text{ب}}$.

أثبت أن : $\overleftarrow{\text{ق}_١} = \left(\frac{\overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{ب}}}{\text{ب}^٢}\right) \overleftarrow{\text{ب}}$

ثم أوجد $\overleftarrow{\text{ق}_٢}$

(٤) أوجد متجه وحدة عمودى على كل من المتجهين :

$\overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}$.

(إرشاد : أحسب معيار المتجه $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$)

(٥) $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٣}$ ثلاث متجهات قوة تحقق العلاقة :

$$\overleftarrow{\text{ق}}_{١} + \overleftarrow{\text{ق}}_{٢} + \overleftarrow{\text{ق}}_{٣} = \overleftarrow{٠}$$

أثبت أن $\overleftarrow{\text{ق}}_{١} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{٢} = \overleftarrow{\text{ق}}_{٢} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{٣} = \overleftarrow{\text{ق}}_{٣} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{١}$

فسر هذه النتيجة هندسيًا .

(٦) إذا كان

$\overleftarrow{\text{أ}} = ١٥\,\overleftarrow{\text{س}} + ٦\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = ٣\,\overleftarrow{\text{س}} + ٥\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ}} = \overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}$

فأوجد كلا من : $(\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) \times \overleftarrow{\text{جـ}}$ ، $(\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}) \odot \overleftarrow{\text{جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ}} \odot (\overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{جـ}})$ ،

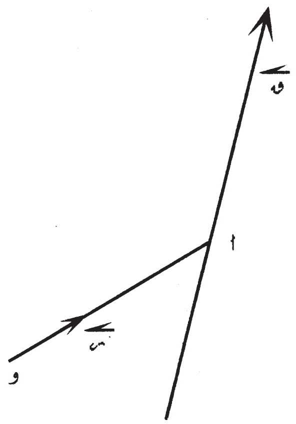
$(\overleftarrow{\text{ب}} \times \overleftarrow{\text{أ}}) \times \overleftarrow{\text{جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} \times (\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{جـ}})$ ، $\overleftarrow{\text{أ}} \times (\overleftarrow{\text{جـ}} \times \overleftarrow{\text{ب}})$

(٧) أوجد حاصل الضرب الاتجاهى $\overleftarrow{\text{أ}} \times \overleftarrow{\text{ب}}$ إذا علمت أن "

$\overleftarrow{\text{أ}} = ٥\,\overleftarrow{\text{س}} - ٤\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = ٣\,\overleftarrow{\text{س}} + ٧\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ثم أوجد مساحة سطح المثلث المقام على القطعتين المستقيمتين الموجهتين الممثلتين لهذين الضلعين كضلعين متجاورين .

عزم قوة بالنسبة لنقطة

لتكن أ أى نقطة على خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ر}$ متجه موضع أ بالنسبة للنقطة و (شكل ٤٧) .

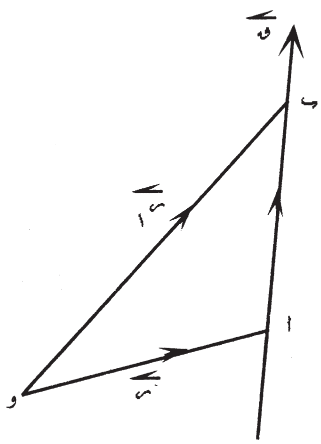


شكل (٤٧)

تعريف :

يعرف عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة و ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{ج}_و$ على أنه الكمية المتجه $\overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$ أى أن $\overleftarrow{ج}_و = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$

من السهل أن نلاحظ أن $\overleftarrow{ج}_و$ لا يتوقف على النقطة أ التى اخترناها على خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$.



شكل (٤٨)

لنفرض أن ب نقطة أخرى على خط عمل القوة ، $\overleftarrow{ر}_١$ متجه موضعها بالنسبة للنقطة و (شكل ٤٨) .

لدينا :

$$\overleftarrow{ر}_١ \times \overleftarrow{ق} = (\overleftarrow{ر} + \overleftarrow{أب}) \times \overleftarrow{ق}$$

$$= \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} + \overleftarrow{أب} \times \overleftarrow{ق}$$

ولكن $\overleftarrow{أب}$ يوازى $\overleftarrow{ق}$

$$\therefore \overleftarrow{أب} \times \overleftarrow{ق} = \overleftarrow{.}$$

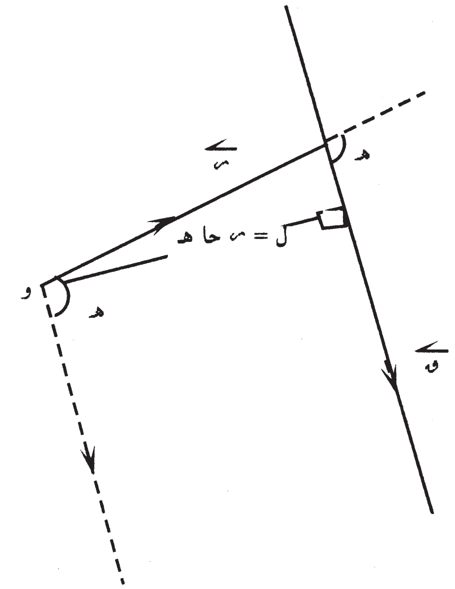
$$\therefore \overleftarrow{ر}_١ \times \overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$$

وبالتالى لا يتوقف عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة و على موضع النقطة التى نختارها على خط عمل هذه القوة عند حساب العزم .

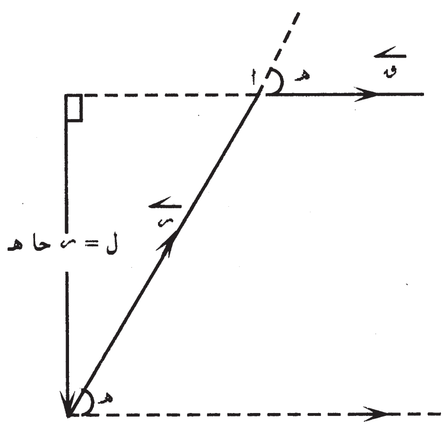
يتضح من التعريف أن عزم القوة $\overleftarrow{ق}$ (غير الصفرية) ينعدم عندما يكون $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{.}$ ، أو أن يكون $\overleftarrow{ر}$ موازيا $\overleftarrow{ق}$. أى إذا كان خط عمل القوة يمر بالنقطة التى ينسب إليها العزم .

تعيين الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{\text{ر}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$ عند حساب عزم القوة بالنسبة لنقطة :

من المهم للغاية أن يتمكن الطالب من تعيين الزاوية هـ المحصورة بين المتجهين $\overleftarrow{\text{ر}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$ عند حساب العزم بطريقة سليمة .



شكل (٤٩ – أ)



شكل (٤٩ – ب)

وعلى الطالب أن يتذكر أن تحديد هـ يتطلب رسم المتجهين $\overleftarrow{\text{ر}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$ خارجين أو داخلين من نقطة واحدة . لذلك علينا أن نتخيل مثلا أننا نقلنا متجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ موازيا لنفسه بحيث تنطبق نقطة بدايته على النقطة و .

يوضح الشكلان (٤٩ أ ، ب) حالتين مختلفتين لتعيين الزاوية المحصورة بين $\overleftarrow{\text{ر}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$.

ومن السهل أن نلاحظ أنه فى كل الأحوال يعطى طول العمود الساقط من النقطة و على خط عمل القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ من العلاقة :

ل = ر حا هـ

حيث ر = || $\overleftarrow{\text{ر}}$ ||

معيار واتجاه عزم قوة بالنسبة لنقطة :

ليكن $ق = \|\overrightarrow{ق}\|$ ، طول العمود الساقط من نقطة و والتى نحسب العزم بالنسبة لها على خط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$.

يتضح مما سبق أن معيار متجه عزم القوة $\overrightarrow{ق}$ بالنسبة للنقطة و يعطى من العلاقة :

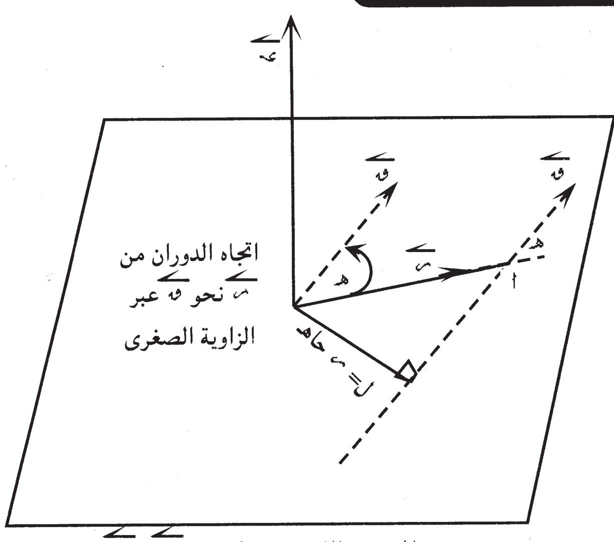
$$\|\overrightarrow{ج_و}\| = \|\overrightarrow{ر} \times \overrightarrow{ق}\| = ر\, ق \text{ حا } هـ$$

$$= ق\, (ر \text{ حا } هـ)$$

$$= ق\, ل$$

$$\boxed{\|\overrightarrow{ج_و}\| = ق\, ل}$$

وتكون وحدة قياس معيار متجه العزم مساوية لحاصل ضرب وحدة قياس الطول فى وحدة قياس معيار القوة أما اتجاه متجه العزم $ج_و$ ، فهو اتجاه متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ العمودى على المستوى الذى يجمع كلا من المتجهين $\overrightarrow{ر}$ ، $\overrightarrow{ق}$. ويتحدد اتجاه المتجه ى بقاعدة اليد اليمنى التى سبق شرحها. عند دوران المتجه $\overrightarrow{ر}$ نحو المتجه $\overrightarrow{ق}$ (بعد نقل بداية الأخير إلى النقطة و) عبر الزاوية الصغرى المحصورة بينهما (شكل ٥٠) .



شكل (٥٠)

مما سبق ينتج أن :

$$\boxed{\overrightarrow{ج_و} = (ق\, ل)\, \overrightarrow{ى}}$$

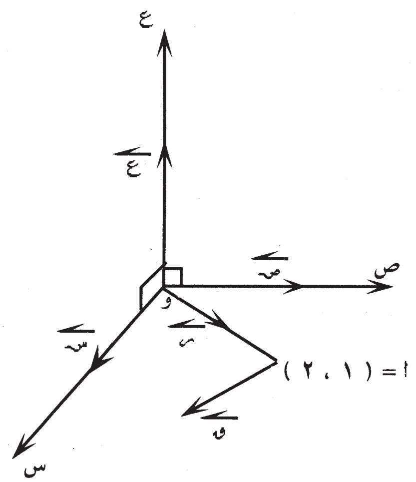
مثال :

ليكن $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ اتجاهين متعامدين ، $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجهى الوحدة فى هذين الاتجاهين على الترتيب . تؤثر القوة $\overleftarrow{\text{ق}} = (\text{٢}\ \overleftarrow{\text{س}} - \text{٣}\ \overleftarrow{\text{ص}})$ عند النقطة أ = (١ ، ٢) .

احسب عزم هذه القوة بالنسبة للنقطة و ثم عين طول العمود الساقط من النقطة و على خط عمل القوة .

الحـــل

نعرف متجه الوحدة $\overleftarrow{\text{ع}}$ العمودى على كل من $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ بحيث تكون المجموعة $\{\overleftarrow{\text{س}} ، \overleftarrow{\text{ص}} ، \overleftarrow{\text{ع}}\}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة (شكل ٥١) .



شكل (٥١)

لدينا :

$$\overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{و أ}} = \overleftarrow{\text{س}} + \text{٢}\ \overleftarrow{\text{ص}}$$

$$\therefore\ \overleftarrow{\text{ج}_{\text{و}}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}$$

$$= (\overleftarrow{\text{س}} + \text{٢}\ \overleftarrow{\text{ص}}) \times (\text{٢}\ \overleftarrow{\text{س}} - \text{٣}\ \overleftarrow{\text{ص}})$$

$$= [\text{١} \times (-\text{٣}) - \text{٢} \times \text{٢}]\ \overleftarrow{\text{ع}}$$

$$= -\text{٧}\ \overleftarrow{\text{ع}}$$

يمكننا الآن حساب طول العمود ل الساقط من نقطة الأصل على خط عمل القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$

$$\therefore\ \|\overleftarrow{\text{ج}_{\text{و}}}\| = \text{ق ل}$$

$$\therefore\ \text{ل} = \frac{\|\overleftarrow{\text{ج}_{\text{و}}}\|}{\text{ق}} = \frac{\text{٧}}{\sqrt{(\text{٢})^{\text{٢}} + (-\text{٣})^{\text{٢}}}}$$

$$= \frac{\text{٧}}{\sqrt{\text{١٣}}}\ \text{وحدة طول}$$

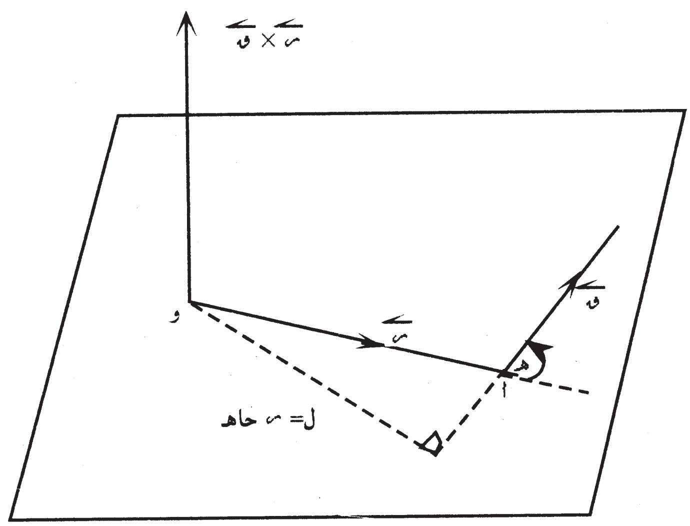
عــزوم القــوى المســتــويــة

ستقتصر دراستنا فيما يلى على القوى المستوية ، أى تلك القوى التى تقع خطوط عملها فى مستو واحد .

وفى هذه الحالة يكون حساب عزوم هذه القوى بالنسبة لنقطة واقعة فى مستويها أكثر سهولة من ذى قبل .. كما سيتضح الآن :

نعتبر أى من قوى المجموعة $\overleftarrow{\text{ق}}$ مثلا . وليكن $\overleftarrow{\text{ر}}$ متجه موضع نقطة اختيارية أ على خط عملها بالنسبة للنقطة (و) الواقعة فى مستوى القوى والتى سننسب إليها العزم، $\|\overleftarrow{\text{ق}}\| = \text{ق}$ ، ل هو طول العمود الساقط من نقطة (و) على خط عمل القوة .

بما أن المتجهين $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ر}}$ واقعان فى مستوى القوى، فإن متجه العزم $\text{ج}_{\text{و}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}$ يكون عموديا على هذا المستوى كما يبين شكل (٥٢) ويساوى معياره حاصل ضرب معيار القوة فى طول العمود الساقط من النقطة (و) على خط عملها .

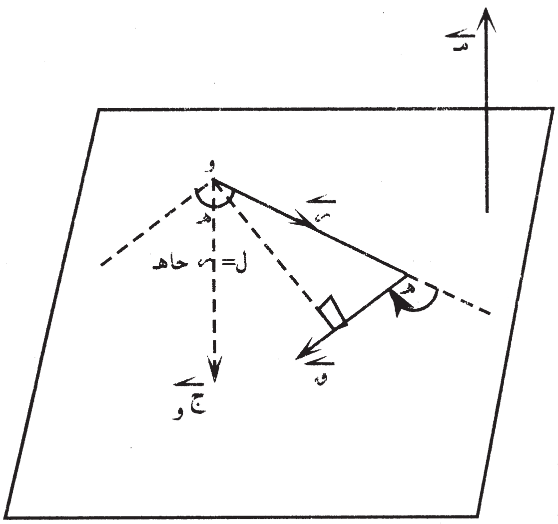


شكل (٥٢)

وعلى ذلك تكون كل متجهات عزوم القوى المستوية متوازية وعمودية على مستوى هذه القوى مما يتيح لنا استخدام القياسات الجبرية لمتجهات العزوم بدلا من لمتجهات العزوم نفسها .

لذلك نحدد متجه وحدة $\overleftarrow{\text{م}}$ عمودى على مستوى القوى . وننسب إليه متجهات عزوم القوى:

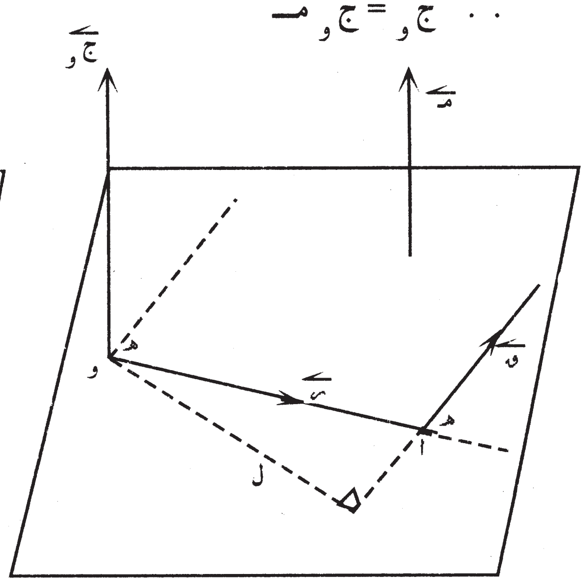
$\therefore\ \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \text{ج}_{\text{و}}\ \overleftarrow{\text{م}}$



ج $_{\text{و}}$ فى عكس اتجاه $\overleftarrow{\text{م}}$

$\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = (-\ \text{ق ل})\ \overleftarrow{\text{م}}$ ، ج $_{\text{و}}$ = − ق ل

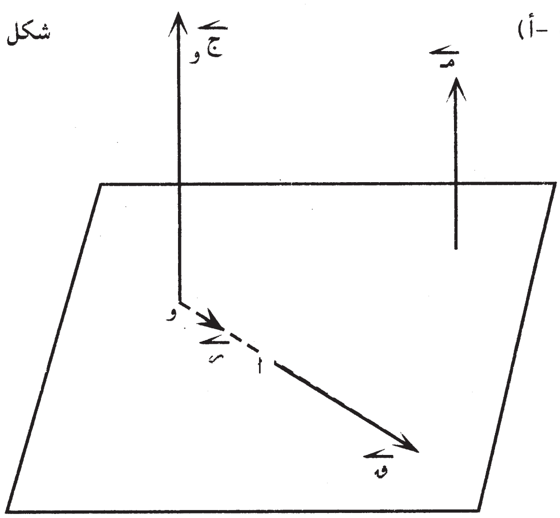
شكل (٥٣ -ب)



ج $_{\text{و}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{م}}$

$\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = (\text{ق ل})\ \overleftarrow{\text{م}}$ ، ج $_{\text{و}}$ = ق ل

شكل (٥٣ -أ)



$\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overleftarrow{0}$ ، ج $_{\text{و}}$ = صفر

خط عمل القوة يمر بالنقطة و

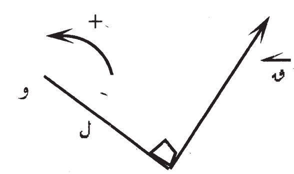
شكل (٥٣ - جـ)

حيث $\text{ج}_{\text{و}}$ هو القياس الجبرى للمتجه $\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}}$ بالنسبة لمتجه الوحدة $\overleftarrow{\text{م}}$ يبين أشكال (٥٣) الحالات المختلفة الممكنة .

ولما كنا سنكتفى بالتعامل مع القياسات الجبرية لمتجهات العزوم $\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}}$ للقوى المستوية فأننا سنغفل ذكر المتجه $\overleftarrow{\text{م}}$ فيما يلى ونحدد اشارة القياس الجبرى $\text{ج}_{\text{و}}$ لمتجه العزم وفقا للقاعدة الآتية (أشكال ٥٤) .

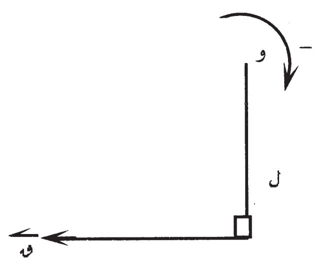
قـاعــــدة :

إذا نظر مشاهد نحو مستوى القوى فوجد القوة تعمل على الدوران حول (و) فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة . اعتبر القياس الجبرى لمتجه العزم موجبا كما فى شكل (٥٤ - أ) وإذا وجد القوة تعمل على الدوران حول (و) فى اتجاه دوران عقارب الساعة اعتبر القياس الجبرى لمتجه العزم سالبا كما فى شكل (٥٤ - ب) . أما إذا كان خط عمل القوة يمر بالنقطة (و) كان القياس الجبرى لمتجه عزمها مساويا للصفر كما فى شكل (٥٤ - جـ) .



الدوران فى عكس اتجـاه دوران عقارب الساعة $\text{ج}_{\text{و}} = \text{ق ل}$

شكل (٥٤ - أ)



الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة $\text{ج}_{\text{و}} = -\text{ق ل}$

شكل (٥٤ - ب)

خط عمل القوة يمر بالنقطة و

$\text{ج}_{\text{و}} = \text{صفر}$

شكل (٥٤ - جـ)

يطلق اسم «ذراع القوة» على طول العمود الساقط من النقطة (و) على خط عمل القوة .

ملاحظة هامة :

فيما يلى عندما نتحدث عن المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى المستوية حول نقطة . فأننا نعنى بذلك مجموع القياسات الجبرية لمتجهات عزوم هذه القوى بالنسبة للنقطة المذكورة آخذين فى الاعتبار القاعدة السابقة .

مثال (١) :

أ ب جـ د مربع طول ضلعه ل ، تؤثر قوى مقاديرها ق ، ٢ق ، ٣ ق ، ٤ق ، ٨ $\sqrt{2}$ ق من وحدات القوى فى أ ب ، ب جـ ، جـ د ، د أ ، جـ أ على الترتيب .

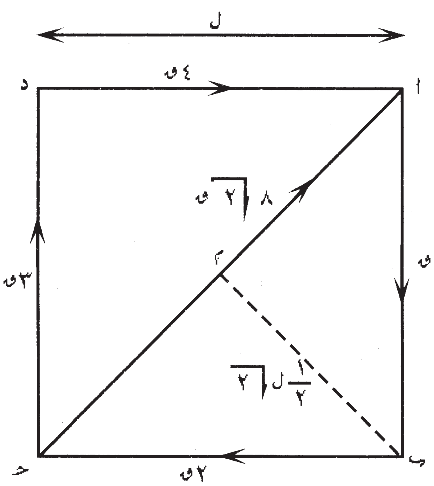
احسب المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول الرأس ب .

الحــل

بالرجوع إلى شكل (٥٥)

نلاحظ أولا أن القوتين ق ، ٢ ق تمران بالنقطة ب .

وبالتالى ينعدم عزم كل منهما حول ب .



أما القوة ٣ ق فذراعها بالنسبة إلى ب هو جـ ب وتعمل هذه القوة على الدوران حول ب فى اتجاه عقارب الساعة ، أى أن عزمها يكون سالبا ، ومساويًا

− ٣ ق × ل = −٣ ق ل

أما القوة ٤ ق فذراعها بالنسبة إلى ب هو أ ب ، وتعمل هذه القوة أيضًا على الدوران حول ب فى اتجاه عقارب الساعة وعى ذلك يساوى عزمها .

− ٤ ق × ل = − ٤ ق ل

أخيراً .. نلاحظ أن ذراع القوة ٨ $\sqrt{٢}$ ق هو $\overline{\text{ب م}}$. حيث م مركز المربع ويساوى طول الذراع $\frac{١}{٢}$ ل $\sqrt{٢}$. وتعمل هذه القوة على الدوران حول ب فى اتجاه عقارب الساعة . أى أن عزمها سالب ويساوى

$$- ٨ \,(\sqrt{٢}\ \text{ق}) \times \frac{١}{٢}\ \text{ل}\ \sqrt{٢} = -٨\ \text{ق ل}$$

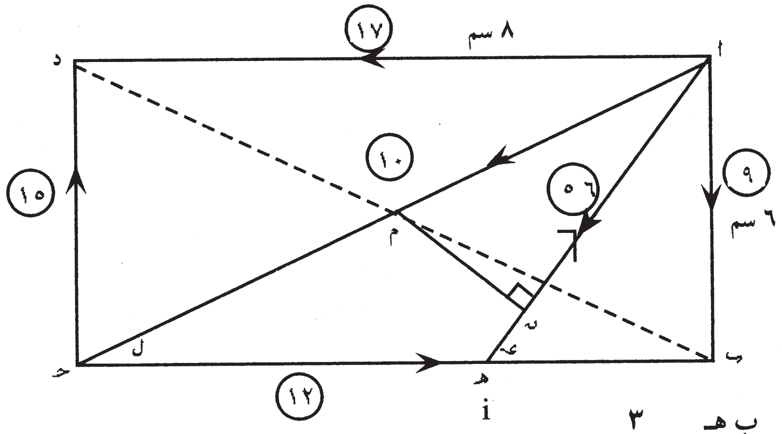
∴ المجموع الجبرى لعزوم القوى حول ب

= - ٣ ق ل - ٤ ق ل - ٨ ق ل = -١٥ ق ل

مثال (٢) :

أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨ سم ، هـ ∋ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب هـ = ٣سم . أثرت قوي مقاديرها ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٧ ، ١٠ ، ٦ $\sqrt{٥}$ ، نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ د}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ على الترتيب . أوجد مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول كل من النقط أ ، ب ، جـ ، هـ ، م حيث م نقطة تقاطع القطرين .

الحــل



Δ أ ب جـ فيه $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف ب $\hat{\text{أ}}$ جـ

أهـ = $\sqrt{٩ + ٣٦}$ = ٣ $\sqrt{٥}$ سم أجـ = ب د = $\sqrt{٣٦ + ٦٤}$ = ١٠سم

Δ أ م ن قائم فى ن

∴ م ن = ٥ حا م $\hat{\text{أ}}$ ن

= ٥ حا هـ $\hat{\text{أ}}$ ب

= ٥ × $\frac{٣}{٣\sqrt{٥}}$

∴ م ن = $\sqrt{٥}$ سم

$\text{ج}_{\text{أ}}$ = ١٢ × ٦ − ١٥ × ٨ = ٧٢ − ١٢٠ = − ٤٨ نيوتن سم

$\text{ج}_{\text{ب}}$ = −١٥ × ٨ + ١٧ × ٦ + ٦ $\sqrt{٥}$ × ٣ حا ى + ١٠ × ٨ حا ل

= − ١٢٠ + ١٠٢ + ٦ $\sqrt{٥}$ × $\frac{٣ \times ٦}{٣\sqrt{٥}}$ + ١٠ × ٨ × $\frac{٦}{١٠}$

= − ١٢٠ + ١٠٢ + ٣٦ + ٤٨ = ٦٦ نيوتن . سم

$\text{ج}_{\text{جـ}}$ = ١٧ × ٦ − ٩ × ٨ − ٦ $\sqrt{٥}$ × ٥ حا ى

= ١٠٢ − ٧٢ − ٦ $\sqrt{٥}$ × ٥ × $\frac{٦}{٣\sqrt{٥}}$ = ١٠٢ − ٧٢ − ٦٠

= − ٣٠ نيوتن . سم

$\text{ج}_{\text{هـ}}$ = ١٧ × ٦ − ١٥ × ٥ − ٩ × ٣ + ١٠ × ٥ حا ل

= ١٧ × ٦ − ١٥ × ٥ − ٩ × ٣ + ١٠ × ٥ × $\frac{٦}{١٠}$

= ١٠٢ − ١٠٢ + ٣٠ = ٣٠ نيوتن . سم

$\text{ج}_{\text{م}}$ = ١٧ × ٣ + ١٢ × ٣ − ١٥ × ٤ − ٩ × ٤ − ٦ $\sqrt{٥}$ × $\sqrt{٥}$

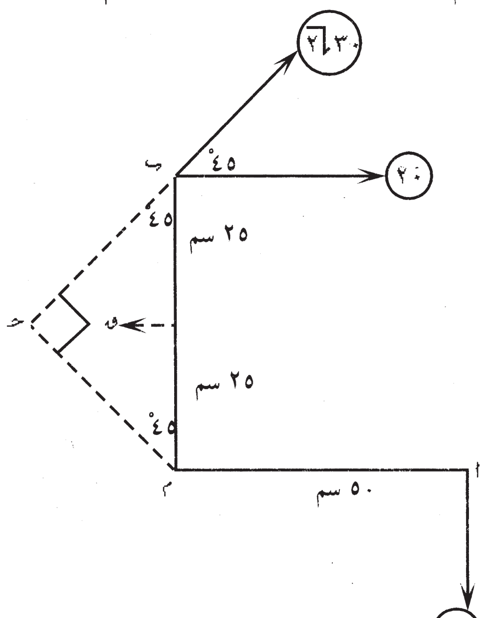
= ٥١ + ٣٦ − ٦٠ − ٣٦ − ٣٠ = −٣٩ نيوتن . سم

مثال (٣) :

ثنى قضيب أ ب طوله ١٠٠ سم عند نقطة منتصفه م بحيث أصبح $\overline{\text{أ م}}$ عموديا على $\overline{\text{م ب}}$. أثرت القوى ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ $\sqrt{٢}$ ث كجم عند الطرفين أ ، ب كما هو مبين بشكل (٥٧) . ما هو مقدار القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ التى يجب أن تؤثر عند منتصف $\overline{\text{م ب}}$ وفى الاتجاه الموضح بالشكل بحيث ينعدم المجموع الجبرى لعزوم القوى حول نقطة م ؟

الحـــل

لحساب ذراع القوة $٣٠\sqrt{٢}$ ث كجم نمد خط عملها ثم نسقط عليه عمودا من نقطة م فيقطعه عند جـ (شكل ٥٧)



شكل (٥٧)

من الرسم :

$$\text{م جـ} = ٥٠ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{٥٠}{\sqrt{٢}} \text{ سم}$$

المجموع الجبرى لعزوم القوى حول م

$$= -\ ١٠ \times ٥٠ + ٢٥\ \text{ق} - ٢٠ \times ٥٠$$

$$-\ (٣٠\sqrt{٢}) \times \frac{٥٠}{\sqrt{٢}} = \text{صفر}$$

$$\therefore\ ٢٥\ \text{ق} = ٣٠٠٠$$

$$\therefore\ \text{ق} = \frac{٣٠٠٠}{٢٥} = ١٢٠ \text{ ث كجم}$$

مثال (٤) :

تؤثر القوى $\overleftarrow{\text{ق}}_{١} = \overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢} = \overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٣} = ٢\ \overleftarrow{\text{س}} - ٣\ \overleftarrow{\text{ص}}$ عند النقطة أ = (١ ، ١) .

أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول نقطة ب (٣ ، −١) .

أوجد كذلك عزم محصلة هذه القوى حول نقطة ب ... ماذا تلاحظ ؟

الحـــل

لتكن $\overleftarrow{\text{ج}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ج}}_{٢}$ ، $\overleftarrow{\text{ج}}_{٣}$ عزوم القوى الثلاث بالنسبة للنقطة ب وليكن $\overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{ب أ}}$

$$\therefore\ \overleftarrow{\text{ج}}_{١} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{١} = (-\ ٢\ \overleftarrow{\text{س}} + ٢\ \overleftarrow{\text{ص}}) \times (\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}})$$

$$= (-٢ \times ١ - ١ \times ٢)\ \overleftarrow{\text{ع}}$$

$$= -\ ٤\ \overleftarrow{\text{ع}}$$

$$\overleftarrow{\text{ج}}_{٢} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{٢} = (-٢\,\overleftarrow{\text{س}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}) \times (\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}})$$

$$= -٢\,(\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}}) \times (\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}})$$

$$= -٢ \times \overleftarrow{٠} = \overleftarrow{٠}$$

$$\overleftarrow{\text{ج}}_{٣} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{٣} = (-٢\,\overleftarrow{\text{س}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}) \times (٢\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ص}})$$

$$= (-٢ \times -٣ - ٢ \times ٢)\,\overleftarrow{\text{ع}}$$

$$= ٢\,\overleftarrow{\text{ع}}$$

$$\therefore\ \overleftarrow{\text{ج}}_{١} + \overleftarrow{\text{ج}}_{٢} + \overleftarrow{\text{ج}}_{٣} = -٤\,\overleftarrow{\text{ع}} + \overleftarrow{٠} + ٢\,\overleftarrow{\text{ع}} = -٢\,\overleftarrow{\text{ع}}$$

$$\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}}_{١} + \overleftarrow{\text{ق}}_{٢} + \overleftarrow{\text{ق}}_{٣}$$

$$= (\overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}) + (\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}}) + (٢\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ص}})$$

$$\overleftarrow{\text{ح}} = ٤\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ص}}$$

عزم المحصلة $= \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ح}} = (-٢\,\overleftarrow{\text{س}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ص}}) \times (٤\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ص}})$

$$= (-٢ \times -٣ - ٤ \times ٢)\,\overleftarrow{\text{ع}}$$

عزم المحصلة $= -٢\,\overleftarrow{\text{ع}}$

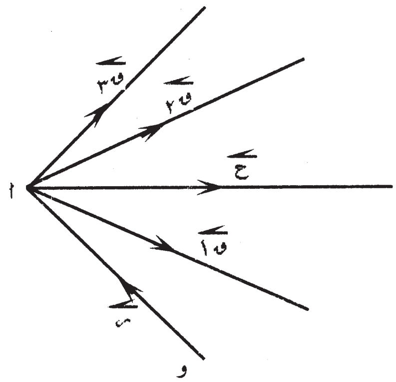
نلاحظ أن مجموع عزوم الثلاث قوى متلاقية فى أ بالنسبة لنقطة ب يساوى عزم محصلتهم بالنسبة لنفس النقطة .

نظرية :

مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة بالنسبة لأية نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة .

البرهان : لتكن $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٣}$ ، ..... $\overleftarrow{\text{ق}}_{\text{ن}}$ مجموعة محدودة من القوى، أ نقطة تلاقى خطوط عملها .

ولتكن و نقطة عامة فى الفراغ (شكل ٥٨) .



(شكل ٥٨)

نعرف أن المحصلة $\overleftarrow{\text{ح}}$ لهذه المجموعة من القوى تمر أيضًا بالنقطة أ لحساب مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة و

$$\therefore \overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{1} + \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{2} + \ldots + \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{\text{ن}}$$

$$= \overleftarrow{\text{ر}} \times \left(\overleftarrow{\text{ق}}_{1} + \overleftarrow{\text{ق}}_{2} + \ldots + \overleftarrow{\text{ق}}_{\text{ن}} \right)$$

$$= \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ح}}$$

ولكن الناتج هو نفسه عزم المحصلة بالنسبة للنقطة و . إذ أن المحصلة تمر بالنقطة أ وهذا يثبت النظرية .

مثال (٥) :

تؤثر القوى $\overleftarrow{\text{ق}}_{1} = \overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{2} = -\overleftarrow{\text{س}} + 2\,\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{3} = 3\,\overleftarrow{\text{س}} - \overleftarrow{\text{ص}}$ عند النقطة أ = (١ ، ١)

أوجد عزم كل من هذه القوى بالنسبة لنقطة الأصل . ومن ثم أوجد طول العمود الساقط من نقطة الأصل على خط عمل محصلة هذه القوى .

الحـــل

لتكن $\overleftarrow{\text{ج}}_{1}$ ، $\overleftarrow{\text{ج}}_{2}$ ، $\overleftarrow{\text{ج}}_{3}$ عزوم القوى الثلاث بالنسبة لنقطة الأصل وليكن $\overleftarrow{\text{ر}} = \overleftarrow{\text{و أ}}_{1}$

$\overleftarrow{ج_{١}} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_{١}} = (\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}) \times (\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}) = \overleftarrow{٠}$

، $\overleftarrow{ج_{٢}} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_{٢}} = (\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}) \times (-\overleftarrow{س} + ٢\,\overleftarrow{ص})$

$= [\,١ \times ٢ - ١ \times (-١)\,]\,\overleftarrow{ع}$

$= ٣\,\overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{ج_{٣}} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_{٣}} = (\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}) \times (٣\,\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص})$

$= [\,١ \times (-١) - ١ \times ٣\,]\,\overleftarrow{ع} = -٤\,\overleftarrow{ع}$

عزم المحصلة = $\overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ج_{١}} + \overleftarrow{ج_{٢}} + \overleftarrow{ج_{٣}}$

$= ٠ + ٣\,\overleftarrow{ع} - ٤\,\overleftarrow{ع}$

$= -\overleftarrow{ع}$

$\therefore \|\overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ح}\| = ١$

، أيضا : $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_{١}} + \overleftarrow{ق_{٢}} + \overleftarrow{ق_{٣}} = ٣\,\overleftarrow{س} + ٢\,\overleftarrow{ص}$

$\therefore \|\overleftarrow{ح}\| = \sqrt{(٣)^{٢} + (٢)^{٢}} = \sqrt{١٣}$

$\therefore$ طول العمود ل = $\dfrac{\|\overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ح}\|}{\|\overleftarrow{ح}\|}$

= $\dfrac{١}{\sqrt{١٣}}$ وحدة طول

ملاحظتان :

١- إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية حول أ = مجموع عزوم هذه القوى حول ب كان خط عمل المحصلة // $\overleftrightarrow{أ\,ب}$.

٢- إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوى حول أ = - مجموع عزوم هذه القوى حول ب فإن خط عمل المحصلة يمر بمنتصف $\overline{أ\,ب}$.

النظريــة العامــة للعــزوم :

إذا كانت لمجموعة من القوى المستوية المؤثرة على جسم متماسك محصلة فأن : «المجموع الجبرى لعزوم القوى حول نقطة يساوى عزم المحصلة حول نفس النقطة ».

نتائــج :

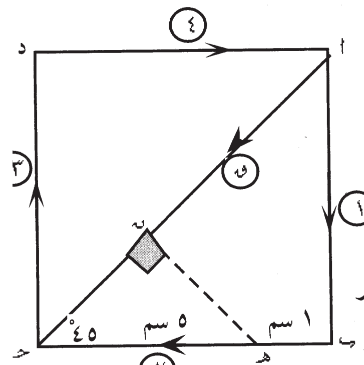
١- المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول أى نقطة على خط عمل المحصلة يساوى صفراً .

٢- إذا كان المجموع الجبرى لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة يساوى صفرا فأما أن تكون المحصلة مساوية للصفر أو يمر خط عملها بهذه النقطة ولهاتين النتيجتين أهمية كبرى فى تعيين خط عمل محصلة مجموعة من القوى المستوية .

مثال (٥) :

أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٦ سم ، أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ق نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ ، $\overleftarrow{\text{د أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ على الترتيب إذا كان عمل محصلة مجموعة القوى يمر بنقطة هـ $\in$ $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ب هـ = ١سم فأوجد قيمة ق .

الحــل



شكل (٥٩)

هـ ن = ٥ جا ٤٥° = $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$ سم

∵ المحصلة تمر بنقطة هـ

∴ جـ هـ = صفر

= -١ × ١ -٣ × ٥ -٤ × ٦ + ق × $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$ = صفر

$\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$ ق = ٤٠

∴ ق = $\frac{٨٠}{٥\sqrt{٢}}$ = $\frac{١٦ \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}$ = ٨$\sqrt{٢}$ نيوتن

تمـاريــن (٢ - ٢)

فى التمارين التالية $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجها وحد ... ، . وفى اتجاهى $\overleftarrow{\text{وس}}$ ، $\overleftarrow{\text{وص}}$ على الترتيب بينما $\overleftarrow{\text{ع}}$ متجه وحدة عمودى على كل من $\overleftarrow{\text{وس}}$ ، $\overleftarrow{\text{وص}}$ وبحيث تكون { $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ } مجموعة يمينية من متجهات الوحدة .

(١) تؤثر القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = - $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ فى نقطة أ = (١ ، ٢) .

عين متجه عزم هذه القوة بالنسبة لنقطة الأصل و = (صفر ، صفر) واحسب طول العمود الساقط من النقطة و على خط عمل القوة .

(٢) تؤثر القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ فى نقطة أ = (٢ ، -١)

أوجد متجه عزم هذه القوة بالنسبة للنقطة ب = (١ ، ٢) ثم احسب طول العمود الساقط من النقطة ب على خط عمل القوة

(٣) تؤثر القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ عند النقطة أ = (-٣ ، -٣)

احسب عزم هذه القوة بالنسب لنقطة الأصل ، وفسر النتيجة التى حصلت عليها .

(٤) تؤثر القوتان $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ = $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ = م $\overleftarrow{\text{س}}$ - ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$. عند النقطتين

أ$_{١}$ = (٢ ، صفر)، أ$_{٢}$ = (صفر ، ٢) على الترتيب .

عين قيمة الثابت م بحيث ينعدم مجموع عزمى هاتين القوتين بالنسبة لنقطة الأصل .

(٥) تؤثر القوتان $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ = (م $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$) ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ = (ل $\overleftarrow{\text{س}}$ - $\overleftarrow{\text{ص}}$) عند النقطتين

أ$_{١}$ = (١ ، ١)، أ$_{٢}$ = (-١ ، -٢) على الترتيب .

عين قيمة كل من الثابتين م ، ل بحيث ينعدم مجموع عزمى هاتين القوتين بالنسبة لنقطة الأصل و بالنسبة للنقطة ب = (٢ ، ٣) .

(٦) القــوى $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ - $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٣}$ = -٣ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ص}}$ تؤثر فى النقطة أ (١ ، ١) برهن باستـخدام العزوم أن خط عـمل المحصلة يوازى المسـتـقـيم المار بالنقطتين (٢ ، ١) ، (٦ ، ٤) .

(٧) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ٢٠ سم ، تؤثر القوى ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ على الترتيب .

أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى :

أولاً : حول نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث .

ثانيًا : حول منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

(٨) تعمل القوى الثلاث $\overleftarrow{ق_1} = ٣ \overleftarrow{س} + ١٢ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = ٩ \overleftarrow{س} + ٤ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3} = ٨ \overleftarrow{س} + ١٤ \overleftarrow{ص}$ عند نقطة الأصل و = (صفر ، صفر) .

أوجد عزم كل من هذه القوي بالنسبة للنقطة ب = (١ ، ٢) ثم احسب مجموع هذه العزوم. عين بعد ذلك محصلة القوى الثلاث، ثم أوجد عزمها بالنسبة للنقطة ب . ماذا تستنتج بمقارنة النتائج ؟

(٩) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٣سم ، ب جـ = ٤سم ، جـ أ = ٥سم أثرت القوى ٥ ، ١٠ ، ١٥ نيوتن . فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ على الترتيب . أوجد المجموع الجبرى لعزوم القوى حول كل من أ ، ب ، جـ

(١٠) أ ب جـ د معين طول ضلعه ١٢سم ، ق (∠أ) = ٦٠° ، أثرت القوى ١١ ، ٦ ، ٥ ، ٧ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{د جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{د ب}}$ على الترتيب . أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى.

أولاً : حول أ　　　　ثانيًا : حول م نقطة تقاطع قطرى المعين .

(١١) أ ب جـ دهـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠سم . أثرت القوى ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{د جـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{د هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ و}}$ ، $\overleftarrow{\text{و أ}}$ على الترتيب . أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى :

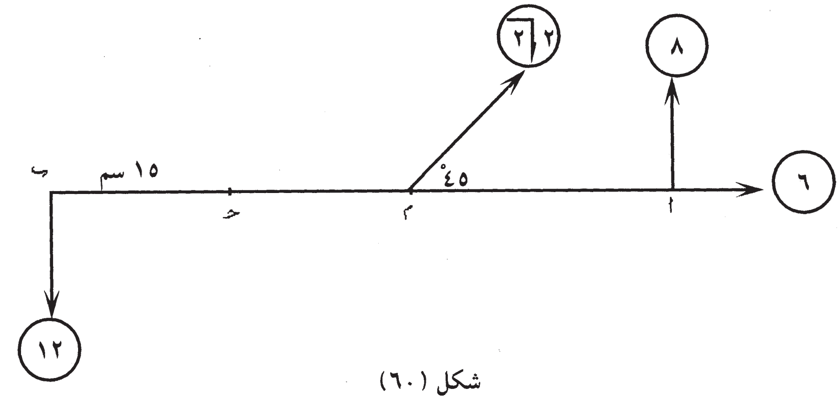
أولاً : حول أ　　　　ثانيًا : حول مركز المسدس .

(١٢) أ ب جـ مثلث فيه ق (∠ ب) = ٩٠° ، ق (∠ أ) = ٦٠° ، ب جـ = ٦سم . أثرت القوتان ٦ ، ٤ نيوتن فى ب أ ، جـ أ على الترتيب . أوجد نقطة د ∈ ب جـ وتجعل المجموع الجبرى لعزمى هاتين النقطتين عندها يساوى صفرا .

(١٣) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم القوى ١٦ ، ١٤ ، ق ، ك ث جم تؤثر فى أ ب ، جـ ب ، جـ د ، أ د على الترتيب . فإذا كان المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول كل من جـ ومركز المستطيل يساوى صفرا . أوجد ق ، ك .

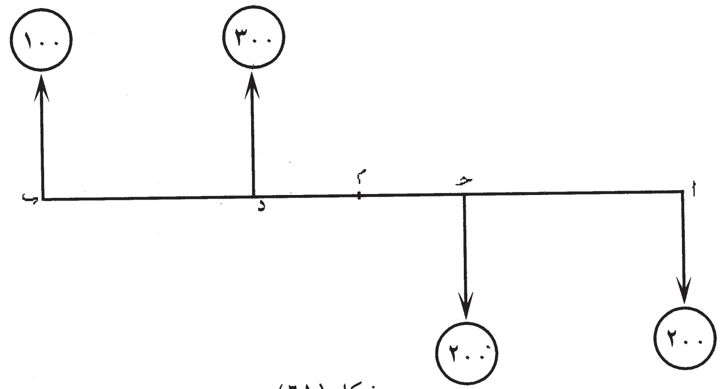
(١٤) أثرت القوى ٦ ، ٨ ، ٢$\sqrt{2}$ ، ١٢ ث كجم فى قضيب أ ب طوله ٦٠سم ، كما هو مبين بالشكل (٦٠) حيث م نقطة منتصف القضيب .

أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه المجموعة من القوى حول النقطة جـ من القضيب التى تبعد ١٥سم عن الطرف ب .



شكل (٦٠)

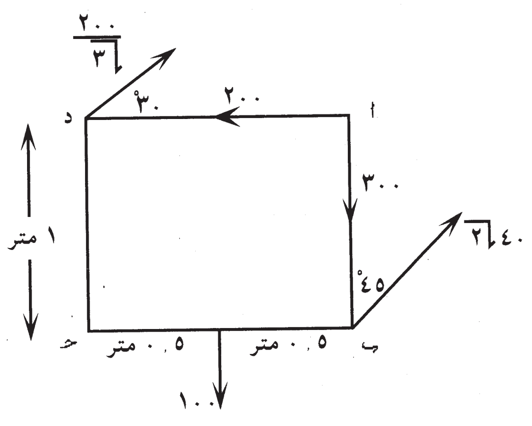
(١٥) أثرت القوى الأربع ٢٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، ١٠٠ نيوتن فى قضيب أ ب طوله ١٢٠ سم عند النقط أ ، جـ ، د ، ب على الترتيب . حيث جـ ، د نقطتى تثليث أ ب . وبحيث كانت كل القوى عمودية على القضيب . وفى الاتجاهات المبينة بشكل (٦١) أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى عند النقط أ ، ب وعند نقطة منتصف القضيب م ، ثم قارن نتائجك ببعضها .



شكل (٦١)

(١٦) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى المثلث بحيث كان $ج_{أ} = ج_{ب} = ٦٠$ نيوتن . سم ، $ج_{جـ} = -٦٠$ نيوتن . سم أوجد مقدار $\overleftarrow{ق}$ وعين خط عملها .

(١٧) تؤثر خمس قوى مقاديرها ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، $\frac{٢٠٠}{\sqrt{٣}}$ ، $٤٠٠\sqrt{٢}$ نيوتن في مربع أ ب جـ د طول ضلعه متر كما هو مبين بشكل (٦٢) .



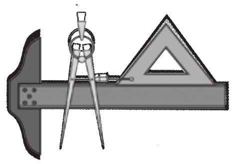
شكل (٦٢)

عين المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول الرأس جـ .

ما هى القوة التى يجب أن تؤثر عند نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ وفى اتجاه عمودى على هذا الضلع حتى ينعدم هذا المجموع ؟

(١٨) أ ب جـ د شبه منحرف قائم الزاوية فى ب ، $\overline{أ د} // \overline{ب جـ}$ ، أ ب = ٨سم، ب جـ = ١٥سم ، أ د = ٩ سم . أثرت قوى مقاديرها ق ، ٤٤ ، ٦٨ ث.جم فى $\overleftarrow{د أ}$ ، $\overleftarrow{د جـ}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$ على الترتيب إذا كان خط عمل محصلة مجموعة القوى يمر بنقطة ب فأوجد قيمة ق .

الفصل الثالث



القوى المتوازية المستوية

Equilibrium of Forces

■ مقدمة :

فى هذا الفصل يتم عرض القوى المتوازية المستوية عندما يطلب ايجاد محصلتهما من حيث اتجاهها ومقدارها ونقطة تأثيرها.

■ الأهداف :

فى نهاية تدريس هذا الفصل ينبغى أن يكون الطالب قادرًا على أن :

١- يعين خط عمل محصلة قوتين متوازيتين عندما تكونان فى اتجاه واحد أو فى اتجاهين مختلفين .

٢- يعين إحدى قوتين متوازيتين إذا عُلمت الأخرى والمحصلة .

٣- يوجد عزوم مجموعة من القوى المتوازية حول نقطة .

٤- يوجد محصلة مجموعة من القوى المتوازية .

٥- يستنتج أن مجموع عزوم عدة قوى متوازية حول نقطة = عزم المحصلة حول نفس النقطة .

٦- يستنتج أن مجموع عزوم مجموعة من القوى المتوازية حول نقطة = ٠ إذا كانت محصلتها تمر بهذه النقطة .

٧- يستنتج أن مجموع عزوم مجموعة من القوى المتوازية حول نقطة = ٠ إذا تلاشت محصلة هذه المجموعة من القوى .

● الموضوعات :

١) القوى المتوازية المستوية .

٢) محصلة قوتين متوازيتين .

٣) إتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية .

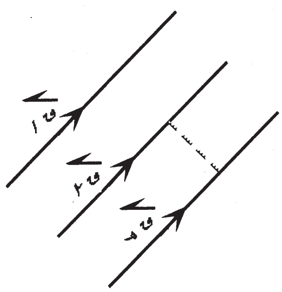
القوى المتوازية المستوية

سبق أن درسنا مجموعة القوى التى تؤثر على نقطة مادية، وكانت خطوط عمل هذه القوى تتلاقى بطبيعة الحال عند هذه النقطة المادية . وقد بينا في حينه أن خط عمل محصلة مثل هذه المجموعة من القوى يمر بنقطة التلاقى المشتركة للقوى ، أى أنه يمر بالنقطة المادية .

ندرس الآن مجموعة القوى التي تؤثر على جسم متماسك، وبالتالى لا تتلاقى خطوط عمل هذه القوى فى نقطة واحدة بالضرورة . وستقتصر دراستنا خلال الفصل الحالى على تلك القوى التى تتوازى خطوط عملها وتقع كلها فى مستو واحد، وهو ما نطلق عليها اسم «القوى المتوازية المستوية» .

لتكن $\overleftarrow{ق}_١$ ، $\overleftarrow{ق}_٢$ ، .... $\overleftarrow{ق}_ن$ ، مجموعة محدودة من القوى المتوازية المستوية كما فى شكل (٦٣) ولتكن $\overleftarrow{ح}$ محصلتها .

سنفرض فيما يلى أن هذه المحصلة لا تنعدم وسنبحث كيفية تعين معيارها واتجاهها وخط عملها .



شكل (٦٣)

لدينا :

$$\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق}_١ + \overleftarrow{ق}_٢ + \ldots\ldots + \overleftarrow{ق}_ن \qquad (١)$$

تحدد هذه العلاقة معيار واتجاه المحصلة $\overleftarrow{ح}$ ويلاحظ أنها توازى قوى المجموعة .

يبقى أن نحدد خط عمل المحصلة، وهو ما سنوضحه فيما يلى استناداً إلى النظرية الآتية :

نظريـــة :

إذا كان أ ب جـ مثلثًا معطى ، م ، ن عددين حقيقيين موجبين فإن :

أ) $م\ \overleftarrow{أ ب} + ن\ \overleftarrow{أ جـ} = (م + ن)\ \overleftarrow{أ د} \qquad (٢)$

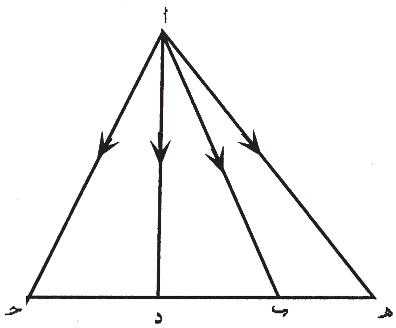
حيث د تقسم $\overline{جـ ب}$ من الداخل بنسبة م : ن

ب) وبفرض أن م > ن

$$\text{م}\ \overleftarrow{\text{أ ب}} - \text{ن}\ \overleftarrow{\text{أ جـ}} = (\text{م} - \text{ن})\ \overleftarrow{\text{أ هـ}} \qquad (٣)$$

حيث هـ تقسم $\overline{\text{جـ ب}}$ من الخارج بنسبة م : ن

البرهـــان



شكل (٦٤)

أولاً : ∵ نقطة د تقسم $\overline{\text{جـ ب}}$ من الداخل بنسبة م : ن

$$\therefore \frac{\text{د ب}}{\text{د جـ}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}$$

$$\therefore \text{م} \times \text{د ب} = \text{ن} \times \text{د جـ}$$

من هذه العلاقة وبملاحظة وضع نقطة د على $\overline{\text{جـ ب}}$ كما فى شكل (٦٤) يمكن كتابة متساوية المتجهات الآتية :

$$\text{م}\ \overleftarrow{\text{د ب}} = -\text{ن}\ \overleftarrow{\text{د جـ}}$$

$$\therefore \text{م}\ \overleftarrow{\text{د ب}} + \text{ن}\ \overleftarrow{\text{د جـ}} = \overleftarrow{\cdot}$$

باستخدام قاعدة مثلث المتجهات :

$$\text{م}\ \overleftarrow{\text{أ ب}} + \text{ن}\ \overleftarrow{\text{أ جـ}} = \text{م}\ (\overleftarrow{\text{أ د}} + \overleftarrow{\text{د ب}}) + \text{ن}\ (\overleftarrow{\text{أ د}} + \overleftarrow{\text{د جـ}})$$

$$= (\text{م} + \text{ن})\ \overleftarrow{\text{أ د}} + (\text{م}\ \overleftarrow{\text{د ب}} + \text{ن}\ \overleftarrow{\text{د جـ}})$$

$$= (\text{م} + \text{ن})\ \overleftarrow{\text{أ د}} + \overleftarrow{\cdot}$$

$$= (\text{م} + \text{ن})\ \overleftarrow{\text{أ د}}$$

وهذا يثبت العلاقة (٢) .

نتيجـة :

إذا كانت د منتصف $\overline{\text{جـ ب}}$ فإن $\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{أ جـ}} = ٢\ \overleftarrow{\text{أ د}}$

ثانيًا : ∵ نقطة هـ تقسم $\overline{جـ ب}$ من الخارج بنسبة م : ن

$\therefore \frac{هـ ب}{هـ جـ} = \frac{ن}{م}$ (لاحظ أن م > ن)

$\therefore$ م × هـ ب = ن × هـ جـ

من هذه العلاقة وبملاحظة وضع نقطة هـ على $\overleftarrow{جـ ب}$ كما فى شكل (٦٤) يمكن كتابة متساوية المتجهات الآتية :

$م \overleftarrow{هـ ب} = ن \overleftarrow{هـ جـ}$

$\therefore ن \overleftarrow{هـ ب} - ن \overleftarrow{هـ ب} = \overleftarrow{٠}$

باستخدام قاعدة مثلث المتجهات :

$م \overleftarrow{أ ب} - ن \overleftarrow{أ جـ} = م (\overleftarrow{أ هـ} + \overleftarrow{هـ ب}) - ن (\overleftarrow{أ هـ} + \overleftarrow{هـ جـ})$

$= (م - ن) \overleftarrow{أ هـ} + (م \overleftarrow{هـ ب} - ن \overleftarrow{هـ جـ})$

$= (م - ن) \overleftarrow{أ هـ} + \overleftarrow{٠}$

$= (م - ن) \overleftarrow{أ هـ}$

وهذا يثبت العلاقة (٣) .

استناداً إلى النظرية السابقة ، يمكن ايجاد خط عمل محصلة عدة قوى متوازية ، وسنبدأ بمجموعة تتكون من قوتين فقط .

محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتى الاتجاه :

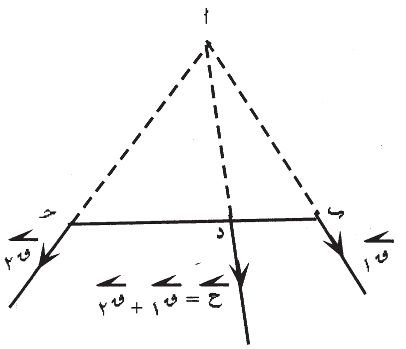
نعتبر أولاً قوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، متلاقيتين فى نقطة أ كما فى شكل (٦٥ - أ) وليكن $ق_١$ ، $ق_٢$ مقداريهما على الترتيب .

نفرض أن : $\frac{ق_١}{ق_٢} = \frac{م}{ن}$

* **البرهان لا يمتحن فيه الطالب .**

نأخذ نقطتين ب ، جـ على خطى عمل القوتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ بحيث يكون أ ب = أ جـ ثم نختار مقياس رسم مناسبًا لمعيار القوة بحيث تمثل القوة $\overleftarrow{ق_1}$ تمثيلاً تامًا بالقطعة المستقيمة الموجهة م $\overleftarrow{أ ب}$ عندئذ ستمثل القوة $\overleftarrow{ق_2}$ تمثيلاً تامًا بالقطعة المستقيمة الموجهة ن $\overleftarrow{أ جـ}$

أما محصلة القوتين : $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2}$



شكل (٦٥-أ)

فتمثل تمثيلاً تامًا بالمجموع (م $\overleftarrow{أ ب}$ + ن $\overleftarrow{أ جـ}$)

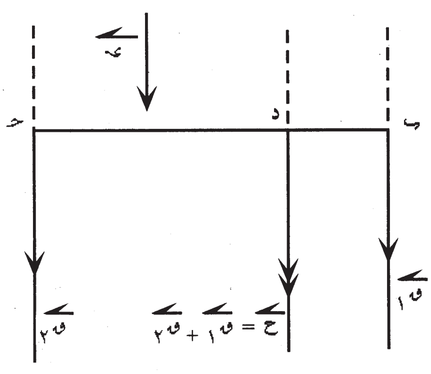
وهذا يساوى (م + ن) $\overleftarrow{أ د}$ حيث د $\in$ $\overline{ب جـ}$ من ناحية ب بنسبة ن : م

أى أن :

$$\frac{د ب}{د جـ} = \frac{ن}{م} = \frac{ق_2}{ق_1}$$

$$\therefore \quad د ب \times ق_1 = د جـ \times ق_2$$

لنفرض الآن أننا جعلنا نقطة أ تبتعد عن $\overline{ب جـ}$ بغير حدود بحيث يظل المثلث أ ب جـ متساوى الساقين . عندئذ تؤول القوتان المتلاقيتان $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ إلى قوتين متوازيتين ومتحدتى الاتجاه كما فى شكل (٦٥ - ب) بينما تظل نقطة د ثابتة على $\overline{ب جـ}$ إذ أن النسبة م : ن تتوقف فقط على النسبة بين معيارى القوتين وليس على اتجاههما .



شكل (٦٥-ب)

فى شكل (٦٥ - ب) فيكون

نأخذ متجه وحدة $\overleftarrow{ى}$ فى اتجاه القوتين

$$\overleftarrow{ق_1} = ق_1 \, \overleftarrow{ى} \quad ، \quad \overleftarrow{ق_2} = ق_2 \, \overleftarrow{ى}$$

$$\therefore \quad \overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} = (ق_1 + ق_2) \overleftarrow{ى}$$

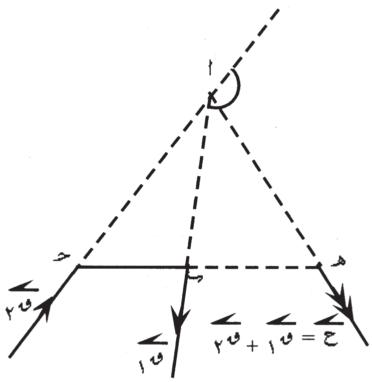
مما يعنى أن المحصلة تكون فى اتجاه القوتين ويساوى معيارها مجموع معيارى القوتين .

بتجميع نتائجنا نحصل فى النهاية على القاعدة الآتية :

قـاعــدة :

محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتى الاتجاه هى قوة فى اتجاههما ويساوى معيارها مجموع معيارى القوتين ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين بنسبة عكسية لمعياريهما .

محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الاتجاه :



شكل (٦٥- ج)

نعتبر أولاً قوتين $\overleftarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ متلاقيتين فى نقطة أ كما فى شكل (٦٤ - جـ) وليكن $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ معياريهما على الترتيب سنفرض أن :

$$\frac{ق_{١}}{ق_{٢}} = \frac{م}{ن} \quad (م > ن)$$

أى أن القوة $\overleftarrow{ق}_{١}$ أكبر معياراً من القوة $\overleftarrow{ق}_{٢}$ نأخذ نقطتين ب ، جـ على خطى عمل $\overleftarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ بحيث يكون أ ب = أ جـ

ثم نختار مقياس رسم مناسب لمعيار القوة بحيث تمثل $\overleftarrow{ق}_{١}$ تمثيلاً تامًا بالقطعة المستقيمة الموجهة م $\overleftarrow{أ\,ب}$. عندئذ ستمثل القوة $\overleftarrow{ق}_{٢}$ تمثيلاً تامًا بالقطعة المستقيمة الموجهة (- ن $\overleftarrow{أ\,جـ}$) وذلك لأن اتجاه القوة $\overleftarrow{ق}_{٢}$ يضاد اتجاه $\overleftarrow{أ\,جـ}$ أما محصلة القوتين $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق}_{١} + \overleftarrow{ق}_{٢}$

فتمثل تمثيلاً تامًا بالمجموع (م $\overleftarrow{أ\,ب}$ - ن $\overleftarrow{أ\,جـ}$) وهذا يساوى (م - ن) $\overleftarrow{أ\,هـ}$ حيث هـ نقطة تقسم $\overline{جـ\,ب}$ من الخارج بنسبة م : ن

أى أن :

$$\frac{هـ\,ب}{هـ\,جـ} = \frac{ن}{م} = \frac{ق_{٢}}{ق_{١}}$$

$\therefore$ هـ ب × $ق_{١}$ = هـ جـ × $ق_{٢}$

* البرهان لا يمتحن فيه الطالب .

نفرض الآن أننا جعلنا نقطة أ تبتعد عن ب جـ بغير حدود بحيث يظل المثلث أ ب جـ متساوى الساقين .

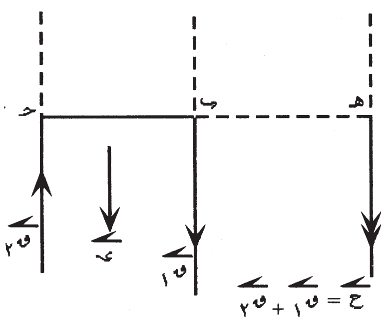
عندئذ تؤول القوتان المتلاقيتان $\overleftarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_2}$ إلى قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الاتجاه (ولا تنعدم محصلتهما) كما فى شكل (٦٥-د) بينما تظل نقطة هـ ثابتة على $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ إذ أن النسبة م:ن تتوقف على النسبة بين معيارى القوتين وليس على اتجاههما .

نأخذ متجه وحدة $\overleftarrow{\text{ى}}$ فى اتجاه القوة الأكبر معيارا ، فيكون :

$$\overleftarrow{\text{ق}_1} = \text{ق}_1 \overleftarrow{\text{ى}} \quad , \quad \overleftarrow{\text{ق}_2} = - \text{ق}_2 \overleftarrow{\text{ى}}$$

$$\therefore \overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}_1} + \overleftarrow{\text{ق}_2} = (\text{ق}_1 - \text{ق}_2) \overleftarrow{\text{ى}}$$

مما يعنى أن المحصلة تكون فى اتجاه القوة الأكبر معياراً ويساوى معيارها الفرق بين معيارى القوتين .



شكل (٦٥- د)

بتجميع نتائجنا نحصل فى النهاية على القاعدة الآتية :

قـاعــدة :

محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الاتجاه وغير متساويتى المعيار هى قوة فى اتجاه القوة الأكبر معيارا ويساوى معيارها الفرق بين معياريهما ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج من ناحية القوة الأكبر معيارا بنسبة عكسية لمعياريهما » .

عزوم القوى المتوازية :

نـظـريـــة :

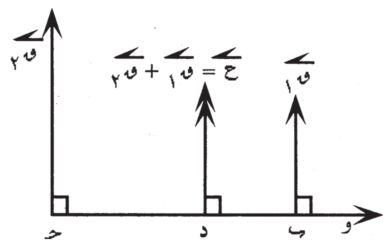
مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لأى نقطة يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة .

البرهــان

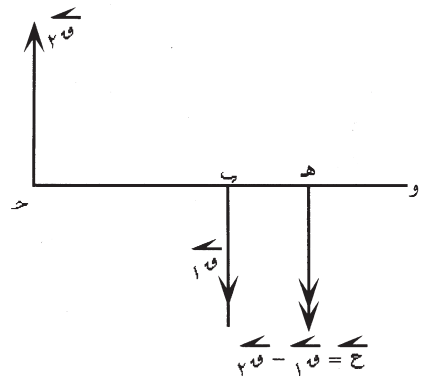
نبدأ بأثبات هذه النظرية فى حالة خاصة عندما تكون المجموعة مكونة من قوتين فقط .

١- إذا كانت القوتان متحدتى الاتجاه :

نعتبر نقطة عامة مثل (و) واقعة فى مستوى القوتين ونقيم منها عموداً مشتركًا على خطى عمل القوتين $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ فيقطعهما فى نقطتى ب ، جـ على الترتيب ويقطع خط عمل المحصلة فى نقطة د مثلاً .



شكل (٦٦ - أ)



شكل (٦٦ - ب)

من العلاقة (٤) : د ب × ق_1 = د جـ × ق_2

بما أن القوى مستوية ونقطة (و) فى مستويها ، فيمكن الاستعاضة عن متجه عزم القوة بقياسه الجبرى منسوبًا لمتجه وحدة $\overrightarrow{\text{م}}$ عمودى على مستوى القوى كما سبق شرحه . المجموع الجبرى لعزوم المجموعة بالنسبة للنقطة (و) = $-\text{ق}_1$ × وب $-\text{ق}_2$ × وجـ

= $-\text{ق}_1$ (و د - د ب) $-\text{ق}_2$ (و د + د جـ)

= $-$ (ق_1 + ق_2) × و د + (ق_1 × د ب $-\text{ق}_2$ × د جـ)

= $-$ (ق_1 + ق_2) × و د

٢- إذا كانت القوتان متضادتين فى الاتجاه :

نعتبر نقطة عامة مثل (و) واقعة فى مستوى القوتين ونقيم منها عموداً مشتركًا على خطى عمل القوتين فيقطعهما فى نقطتى ب ، جـ على الترتيب ويقطع خط عمل المحصلة فى نقطة هـ مثلاً .

بفرض أن ق_1 > ق_2

فإن العلاقة (٥) تعطى

$$هـ ب \times ق_1 = هـ جـ \times ق_2$$

المجموع الجبرى لعزوم المجموعة بالنسبة للنقطة (و) $= ق_1 \times$ وب $- ق_2 \times$ وجـ

$= ق_1$ (و هـ + هـ ب) $- ق_2$ (و هـ + هـ جـ)

$= (ق_1 - ق_2) \times$ و هـ + ($ق_1 \times$ هـ ب $- ق_2 \times$ هـ جـ)

$= (ق_1 - ق_2) \times$ و هـ

= عزم المحصلة بالنسبة لنقطة و

٣- أما إذا كانت المجموعة تتكون من أى عدد محدود (أكبر من ٢) من القوى التى لا تنعدم محصلتها ، فيمكن إثبات النظرية بتحصيل أى قوتين من قوى المجموعة لا تنعدم محصلتهما مع تطبيق النظرية وهكذا حتى يتم تحصيل كافة قوى المجموعة .

٤- النظرية الصحيحة فى حالة كون القوى المستوية غير متوازية .

مثال (١) :

قوتان متوازيتان مقدارهما ٦٠ ، ٤٠ نيوتن والمسافة بين خطى عملهما ٥٠ سم أوجد محصلتهما فى الحالتين :

أ) القوتان فى اتجاه واحد .

ب) القوتان فى اتجاهين متضادين .

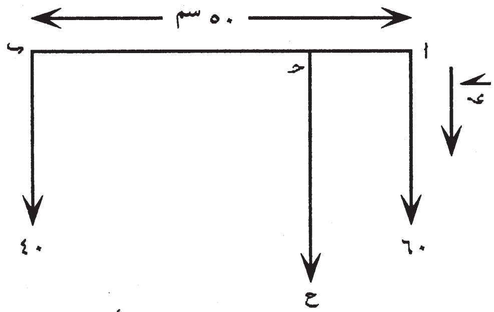
الحـــل

أ) نفرض متجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ فى اتجاه القوتين شكل (٦٧ - أ)

$\therefore \overleftarrow{ق_1} = ٦٠ \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = ٤٠ \overleftarrow{ى}$

$\therefore \overleftarrow{ح} = ١٠٠ \overleftarrow{ى}$ ، ح = ١٠٠ نيوتن

نقيم العمود المشترك على خطى عمل القوتين فيقطعهما فى النقطتين أ ، ب على الترتيب ولتكن جـ $\in$ $\overline{\text{أ ب}}$ نقطة على خط عمل المحصلة .



شكل (٦٧ -أ)

$\therefore$ ٦٠ × أ جـ = ٤٠ × جـ ب

٦٠ × أ جـ = ٤٠ × (٥٠ - أ جـ)

$\therefore$ ١٠٠ أ جـ = ٢٠٠٠

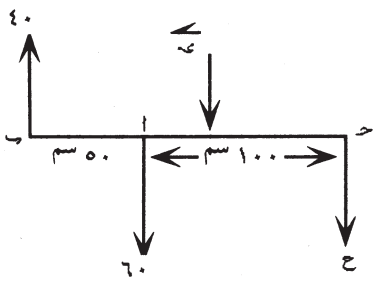
$\therefore$ أ جـ = ٢٠ سم

ب) نفرض أن متجه الوحدة $\overleftarrow{\text{ى}}$ فى اتجاه القوة الأكبر معياراً شكل (٦٧ - ب)

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ = ٦٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ = - ٤٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{ح}}$ = ٢٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$ ، ح = ٢٠ نيوتن

يمر خط عمل المحصلة بنقطة جـ على الشعاع $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، جـ $\notin$ $\overline{\text{ب أ}}$ بحيث تكون :



شكل (٦٧ -ب)

$\therefore$ ٦٠ × أ جـ = ٤٠ × جـ ب

٦٠ × أ جـ = ٤٠ × (٥٠ + أ جـ)

$\therefore$ ٢٠ أ جـ = ٢٠٠٠

$\therefore$ أ جـ = ١٠٠ سم

مثال (٢) :

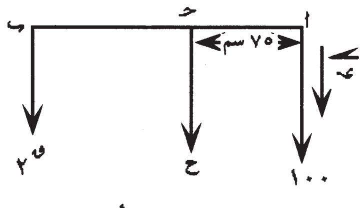
قوتان متوازيتان $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ مقدار أولاهما ١٠٠ نيوتن ومقدار محصلتهما ١٥٠ نيوتن والبعد بين خطى عمل القوة الأولى والمحصلة ٧٥ سم . عين مقدار واتجاه خط عمل القوة $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ فى الحالتين :

أ) $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاه واحد .

ب) $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}$ فى اتجاهين متضادين .

الحــل

أ) نقــيم العــمــود المشــتــرك على خطى عــمل $\overleftarrow{ق}_{١}$ ، $\overleftarrow{ح}$ فيقطعهـما فى النقطتين أ ، جـ على الترتيب وليكن $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة شكل (٦٨ - أ) .



شكل (٦٨ -أ)

∴ $\overleftarrow{ق}_{١}$ = ١٠٠ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ح}$ = ١٥٠ $\overleftarrow{ى}$

∴ $\overleftarrow{ق}_{٢}$ = $\overleftarrow{ح}$ - $\overleftarrow{ق}_{١}$ = ٥٠ $\overleftarrow{ى}$

أى أن القوة $\overleftarrow{ق}_{٢}$ فى اتجاه القوة الأولى ويساوى معيارها ٥٠ نيوتن أما خط عملها ، فيمر بنقطة ب . على $\overleftarrow{أ جـ}$ ، ب ∌ $\overline{أ جـ}$ بحيث يكون ١٠٠ × أ جـ = ٥٠ × جـ ب

∴ ١٠٠ × ٧٥ = ٥٠ × جـ ب

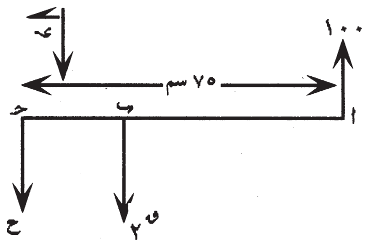
∴ جـ ب = $\frac{١٠٠ \times ٧٥}{٥٠}$ = ١٥٠ سم

ب) إذا كانت المحصلة والقوة المعلومة $\overleftarrow{ق}_{١}$ فى اتجاهين متضادين ، نختار $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه المحصلة شكل (٦٨ - ب)

∴ $\overleftarrow{ق}_{١}$ = - ١٠٠ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ح}$ = ١٥٠ $\overleftarrow{ى}$

أى أن القوة $\overleftarrow{ق}_{٢}$ فى عكس اتجاه $\overleftarrow{ق}_{١}$ ويساوى معيارها ٢٥٠ نيوتن .

أما خط عملها ، فيمر بنقطة ب ∈ $\overline{أ جـ}$ بحيث :



شكل (٦٨ -ب)

١٠٠ × ٧٥ = ٢٥٠ × ب جـ

∴ ب جـ = $\frac{١٠٠ \times ٧٥}{٢٥٠}$ = ٣٠ سم

مثال (٣) :

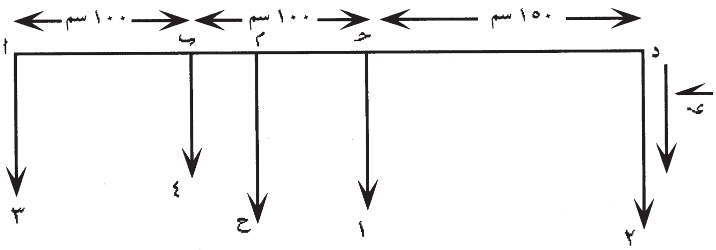
أربع قوى متوازية ومتحدة فى الاتجاه مقاديرها ٣ ، ٤ ، ١ ، ٢ ث كجم تؤثر عند النقطة أ ، ب ، جـ ، د على الترتيب على خط مستقيم واحد عمودى على اتجاه القوى . عين محصلة هذه القوى علمًا بأن أ ب = ب جـ = ١٠٠ سم ، جـ د = ١٥٠ سم

الحـــل

نأخذ متجه وحدة $\overleftarrow{\text{ى}}$ فى اتجاه القوى كما فى شكل (٦٩)

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{ح}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{ى}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{ى}}$ + ١ $\overleftarrow{\text{ى}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ى}}$

$\therefore$ $\overleftarrow{\text{ح}}$ = ١٠ $\overleftarrow{\text{ى}}$ ، ح = ١٠ ث كجم



شكل (٦٩)

أى أن محصلة القوى تكون فى اتجاهها ويساوى معيارها ١٠ ث كجم أما خط عمل المحصلة يمر بنقطة م وتتحدد كما يلى :

القياس الجبرى لعزم المحصلة حول أ = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نفس النقطة .

ج $_{\text{م}}$ = -٤ × ١٠٠ - ١ × ٢٠٠ - ٢ × ٣٥٠ = - ١٣٠٠ ث كجم . سم

أى أن المحصلة تعمل على الدوان حول أ فى اتجاه دوران عقارب الساعة ، مما يعنى أن النقطة م تقع إلى اليمين من أ .

$\therefore$ ج = - ح × أ م

بمقارنة العلاقتين الأخريين نجد :

- ح × أ م = - ١٣٠٠

$\therefore$ أ م = $\frac{\text{١٣٠٠}}{\text{ح}}$ = $\frac{\text{١٣٠٠}}{\text{١٠}}$ = ١٣٠ سم

$\therefore$ تقع م على بعد ١٣٠ سم إلى اليمين من أ

تمـاريــن (٣ - ١)

(١) قـوتان مـتـوازيتـان $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٢}}$ تؤثران فى النقط ب على التـرتيب إذا كـانت $\text{ق}_{١}$ = ٤٠ نيوتن ، $\text{ق}_{٢}$ = ٧٠ نيوتن ، أ ب = ٥٠ سم اوجد محصلة $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٢}}$

أولاً : إذا كانتا متحدتان فى الاتجاه .

ثانيًا : إذا كانتا متضادتان فى الاتجاه .

(٢) $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٢}}$ قوتان متوازيتان متحدتان فى الاتجاه والبعد بين خطى عـملهما ٢٠سم فإذا كـان مقدار محصلتـهما يساوى ٥٠ نيوتن ويبعد خط عـملها عن خط عـمل $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ مسافة ٤سم ، أوجد مقدار كل من القوتين .

(٣) قـوتان متوازيتان مقدار محصلتهـما ٢٥٠ نيوتن ومقدار إحدى القوتين ١٥٠ نيوتن وتعـمل على بعد ٤٠سم من المحصلة . أوجد مقدار القوة الثانية والبعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان :

أولاً : فى اتجاه واحد . ثانيًا : فى اتجاهين متضادين .

(٤) قـوتان متـوازيتان مقدار محصلتهـما ٣٥٠ نيوتن ومقدار إحدى القوتين ٥٠٠ نيوتن وتعـمل على بعد ٥١ سم من المحصلة . أوجد القوة الثانيـة والبعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعْلومة والمحصلة تعملان .

أولاً : فى اتجاه واحد . ثانيًا : فى اتجاهين متضادين.

(٥) قـوتان متـوازيتان صغراهما ٣٠ نيوتن وتؤثر فى الطرف أ من قضيب خفيف أ ب والكبرى تؤثر فى الطرف الآخر ب فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ٩٠ سم ، فما طول القضيب ؟

(٦) قـوتان مـتـوازيتـان وفى اتجاه واحد مـقـدارهمـا ق ، ٢ ق تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب . فـإذا تحركت القوة ق بحيث تظل موازية لنفسـها مسـافة قدرها س على الشعـاع $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ فاثبت أن محصلة القوتين تتحرك مسافة قدرها $\frac{١}{٣}$ س فى نفس الاتجاه .

(٧) أ ب جـ مثلث تؤثر عند رءوسه أ ، ب ، جـ ثلاث قوى متساوية ومتوازية وفى اتجاه واحد . اثبت أن محصلة هذه القوى تمر بنقطة تلاقى متوسطات المثلث .

(٨) أ ب جـ د مربع تؤثر فى رءوسه أ ، ب ، جـ ، د أربع قوى متساوية ومتوازية وفى اتجاه واحد اثبت أن محصلة هذه القوى الأربع تمر بنقطة تقاطع قطرى المربع .

(٩) أ ، ب ، جـ ، د ، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث أ ب = ٤سم ، ب جـ = ٦سم، جـ د = ٨سم ، د هـ = ١٠ سم . أثرت خمس قوى مقاديرها ٦٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ، ٤٠ ث كجم فى النقط أ ، جـ ، د ، ب ، هـ على الترتيب وفى اتجاه عمودى على $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ بحيث كانت القوى الثلاثة الأولى متحدة الاتجاه ، والقوتان الأخريان فى الاتجاه المضاد . عين محصلة المجموعة .

(١٠) أ ، ب ، جـ ، د أربع نقط تقع على خط مستقيم واحد حيث أن أب = ٣٢سم ، ب جـ = ٤٠ سم ، جـ د = ٨سم . أثرت القوتان المتوازيتان ٨ ، ١٠ نيوتن فى أ ، جـ وأثرت فى ب ، د القوتان ٧ ، ٣ نيوتن فى اتجاه مضاد لاتجاه القوتين المؤثرتين فى أ ، جـ، عين محصلة هذه المجموعة من القوى وبُعد نقطة تقاطع خط عملها مع أ د عن نقطة أ .

(١١) خمس قوى متوازية متحدة الاتجاه مقاديرها ٤ ، ٦ ، ٢ ، ٨ ، ١٠ نيوتن تؤثر فى النقط أ ، ب ، جـ ، د ، هـ الواقعة على خط مستقيم واحد عمودى على اتجاه القوى . أوجد بعد نقطة تأثير محصلة هذه القوى عن أ علمًا بأن أ ب = جـ د = ٦٠ سم ، ب جـ = ٢ د هـ = ٩٠سم.

(١٢) أ ، ب ، جـ ، د ، هـ خمس نقط تقع على مستقيم واحد حيث أن ٥ أب = ٣ ب جـ = جـ د = ٦ د هـ = ٣٠ سم . أثرت القوى المتوازية التى مقاديرها ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ق نيوتن فى النقط أ ، جـ ، هـ ، د على الترتيب وفى اتجاه عمودى على $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ بحيث كانت القوى الثلاث الأولى فى اتجاه واحد والقوى ق فى الاتجاه المضاد .

فإذا كانت محصلة هذه المجموعة تؤثر فى نقطة ب . أوجد ق .

اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

ندرس فى هذا البند اتزان جسم متماسك تحت تأثير عدد من القوى المتوازية المستوية .

تجربـــة (٢) :

اتزان جسم متماسك تحت تأثير مجموع من القوى المتوازية المستوية .

الغرض من التجربة :

التحقق من أنه إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية، عددها أكثر من ثلاث ، فإن :

١- مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى يساوى صفراً .

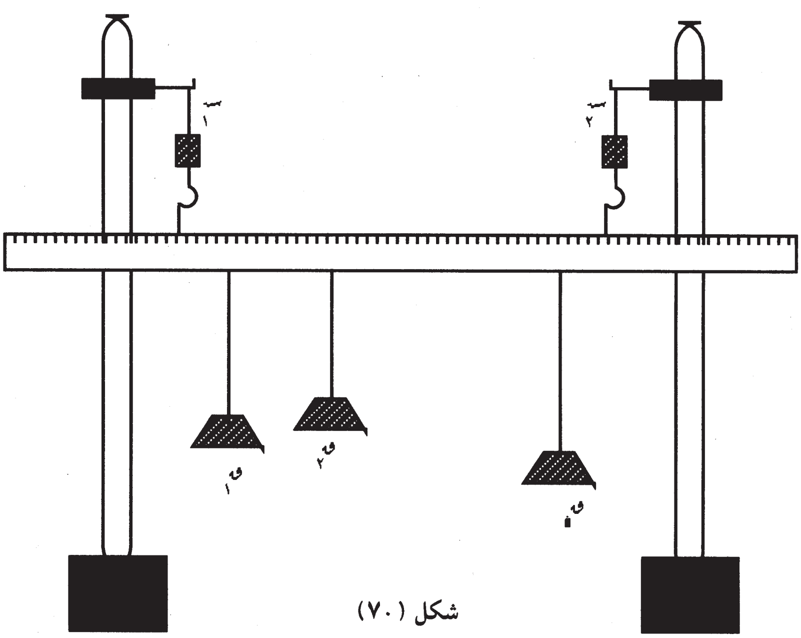
٢- مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها يساوى صفراً .

الأدوات :

مسطرة خفيفة مدرجة - حاملا كابستان - ميزانان زنبركيان - أثقال - خيوط خفيفة .

خطوات العمل :

١- نعلق الميزانين الزنبركيين فى حاملى كابستان ثم نعلق فيهما المسطرة بواسطة خيطين ونضبط الجهاز بحيث يصبح الميزانان والخيطان رأسيين كما فى شكل (٧٠) .



شكل (٧٠)

٢- نعلق عدداً من الأثقال المناسبة فى المسطرة بواسطة خيوط ونعدل فى مواضع هذه الأثقال وفى مقاديرها حتى تتزن المسطرة فى وضع أفقى .

ولتكن مقادير الأثقال $ث_١$ ، $ث_٢$ ، ...... ، $ث_ن$ (هذه القوى موجهة رأسيًا إلى أسفل) .

٣- نعين قراءة كل من الميزانين لتعيين قوتى الشد، وليكن $ش_١$ ، $ش_٢$ معيارى الشدين (هاتان القوتان موجهتان رأسيًا إلى أعلى) نجد أن :

$$ش_١ + ش_٢ = ث_١ + ث_٢ + ... + ث_ن$$

٤- نعين أبعاد الأثقال عن نقطة من نقط المسطرة (تؤخذ عادة نقطة منتصفها) .

٥- نعين المجموع الجبرى لعزوم كافة القوى : ولتكن مقادير الأثقال $ث_١$ ، $ث_٢$ ، .... ، $ث_ن$ ، $ش_١$ ، $ش_٢$ المؤثرة على المسطرة حول النقطة المختارة فنجد أنه يساوى صفراً .

٦- نكرر التجربة عدة مرات مع تغيير الأثقال ونقط تعليقها فنحصل فى كل حالة على النتجة التالية :

*** إذا اتزن جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :**

١- مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى = صفراً .

٢- مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها = صفراً

أستناداً إلى التجربة السابقة يمكن صياغة القاعدة التالية :

قاعـــدة :

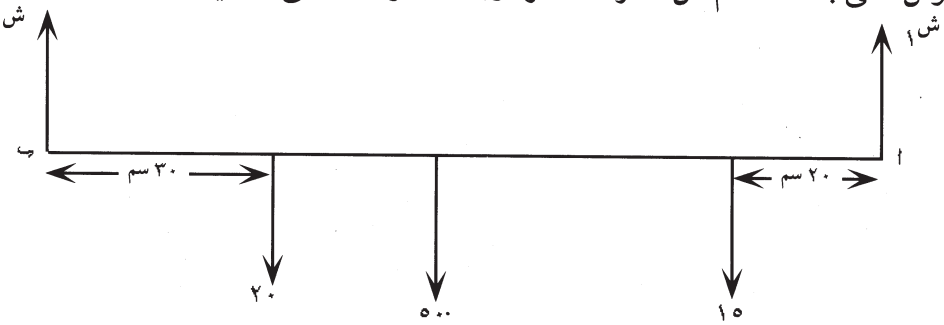
إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :

١- مجموعة القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها) يساوى صفراً .

٢- مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها يساوى صفراً .

مثال (١) :

قضيب منتظم طوله ١ متر ووزنه ٥٠ نيوتن (يؤثر فى منتصفه) معلق أفقيًا عند طرفه بحبلين رأسيين ويحمل القضيب ثقلين أحدهما ١٥ نيوتن على بعد ٢٠سم من أحد الطرفين والآخر ٢٠ نيوتن على بعد ٣٠سم من الطرف الآخر أوجد مقدار الشد فى الحبلين .



شكل (٧١)

الحـــل

القضيب متزن تحت تأثير ٥ قوى هى الشد ($ش_١$) عند الطرف أ والشد ($ش_٢$) عند الطرف ب ووزن القضيب فى منتصفه والثقلين ١٥ ، ٢٠ نيوتن .

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفر

∴ $ش_١$ + $ش_٢$ − ١٥ − ٥٠ − ٢٠ = صفر

∴ $ش_١$ + $ش_٢$ = ٨٥ نيوتن .... (١)

بأخذ العزوم حول أ فأن مجموع القياسات الجبرية للعزوم يساوى صفراً

∴ ١٥ × ٢٠ + ٥٠ × ٥٠ + ٢٠ × ٧٠ − $ش_٢$ × ١٠٠ = صفر

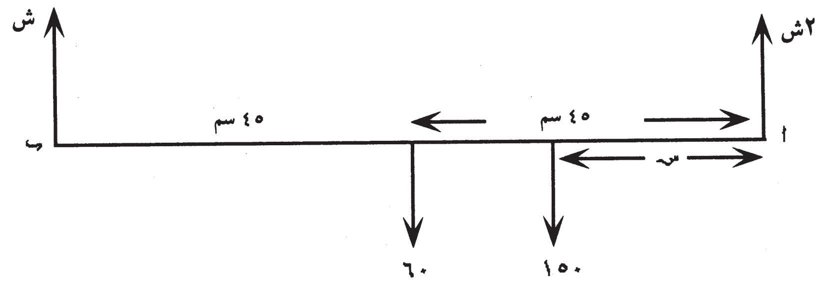
∴ ٣٠٠ + ٢٥٠٠ + ١٤٠٠ = ١٠٠ $ش_٢$

∴ $ش_٢$ = ٤٢ نيوتن

ومن (١) $ش_١$ = ٨٥ − $ش_٢$ $ش_١$ = ٤٣ نيوتن

مثال (٢) :

$\overline{أ ب}$ قضيب منتظم طوله ٩٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن (يؤثر فى منتصفه) معلق فى وضع أفقى بخطين رأسيين من طرفيه أ ، ب . أين يعلق ثقل مقداره ١٥٠ نيوتن حتى يكون الشد عند أ ضعف الشد عند ب ؟



شكل (٧٢)

الحـــل

نفرض أن الثقل ١٥٠ نيوتن معلق من نقطة تبعد عن أ مسافة س سم وأن الشد عند ب = ش أى أن الشد عند أ = ٢ ش

∴ مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفر

∴ ٢ش + ش − ١٥٠ − ٦٠ = صفر

∴ ٣ ش = ٢١٠

∴ ش = ٧٠ نيوتن

بأخذ العزوم حول أ :

∴ ١٥٠ × س + ٦٠ × ٤٥ − ش × ٩٠ = ٠

∴ ١٥٠ س + ٢٧٠٠ − ٦٣٠٠ = ٠

∴ ١٥٠ س = ٣٦٠٠

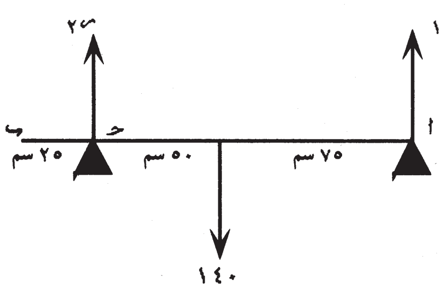
∴ س = ٢٤ سم

مثال (٣) :

$\overline{\text{أ ب}}$ قضيب طوله ١٥٠ سم ووزنه ١٤٠ نيوتن يؤثر عند نقطة منتصفه . يرتكز القضيب فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند أ والثانى عند نقطة جـ تبعد ٢٥ سم من ب . أوجد الضغط الواقع على كل من الحاملين ثم عين مقدار الثقل الذى يجب تعليقه عند ب حتى يكون القضيب على وشك الانقلاب . ما هى قيمة الضغط على الحامل جـ عندئذ ؟

الحـــل

ليكن $ر_١$ ، $ر_٢$ ردى فعل الحاملين عند أ ، جـ على الترتيب شكل (٧٣) .



شكل (٧٣)

شرطا التوازن :

إنعدام مجموع القياسات الجبرية للقوى :

$ر_١ + ر_٢ = ١٤٠$ نيوتن

انعدام مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول حـ:

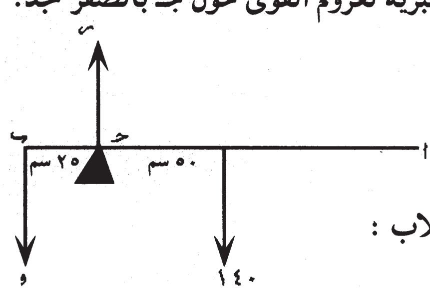
$ر_١ \times ١٢٥ - ١٤٠ \times ٥٠ =$ صفر

$\therefore ر_١ = ٥٦$ نيوتن (وهو يساوى الضغط عند أ)

وبالتالى $ر_٢ = ١٤٠ - ر_١ = ٨٤$ نيوتن (وهو يساوى الضغط عند حـ)

لنفرض الآن أننا علقنا ثقلاً مقدار و من الطرف ب بحيث أصبح القضيب على وشك الانقلاب حول جـ عندئذ . يكون الطرف أ على وشك الانفصال عن الحامل ، ولذلك نضع $ر_١ =$ صفر

بالرجوع إلى شكل (٧٤) ومساواة مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول جـ بالصفر نجد:



شكل (٧٤)

$- ١٤٠ \times ٥٠ + و \times ٢٥ =$ صفر

$\therefore و = ٢٨٠$ نيوتن

نفرض أن ر رد فعل الحامل جـ الذى يحدث حوله الانقلاب :

$ر = ١٤٠ + و = ١٤٠ + ٢٨٠ = ٤٢٠$ نيوتن .

تمـاريــن (٣ - ٢)

(١) ترتكز ساق من الحديد طولها ٣٠ سم ووز[illegible] ٢٠ [illegible]وتن (يؤثر عند منتصف الساق) فى وضع أفقى على حاملين ، أحدهما عند أحد [illegible] آخر على بعد ١٠سم من الطرف الآخر. أوجد رد فعل كل من الحاملين على الساق .

(٢) ساق مهملة الوزن طولها ١٢٠سم ترتكز فى وضع أفقى عند طرفيها على حاملين. عند أى موضع من الساق يجب تعليق ثقل قدره ١٢ ث كجم حتى يصبح مقدار رد الفعل عند أحد الطرفين مساويًا لضعف قيمته عند الطرف الثانى ؟

(٣) ساق من الحديد طولها ٥٠ سم ووزنها ٧٥ نيوتن يؤثر عند منتصفها ترتكز فى وضع أفقى على حاملين البعد بينهما ٢٤سم ، فإذا كان الضغط على أحد الطرفين ضعف الضغط على الحامل الآخر . أوجد بعد كل من الحاملين عن طرف الساق القريب منه .

(٤) عُلقِ قضيب مهمل الوزن طوله ١٢٠ سم فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند طرفيه ثم عُلقِ فيه ثقلان مقدارهما ٥ نيوتن ، ٨ نيوتن عند نقطتى تثليثه . أوجد الشد فى كل من الخيطين .

(٥) يرتكز قضيب مهمل الوزن طوله ٩٠سم فى وضع أفقى على حاملين عند نقطتى تثليثه وعُلقِ من طرفيه ثقلان مقدارهما ٢٠ ، ٣٠ نيوتن عين الضغط على كل من الخيطين .

(٦) أ ب مسطرة طولها ٥٠سم ووزنها ٥٠٠ ث جم يؤثر فى نقطة منتصفها . علقت المسطرة فى وضع أفقى من خيطين رأسيين عند طرفيها وعُلقِ فيها ثقلان أحدهما ١,٥ ث كجم على بعد ١٠ سم من أ ومقدار الآخر ٢ ث كجم على بعد ١٥ سم من ب . عين الشد فى كل خيط .

(٧) قضيب منتظم أ ب طوله ٨٠سم ووزنه ٤ ث كجم يؤثر فى نقطة منتصفه يرتكز القضيب فى وضع أفقى على حاملين أحدهما على بعد ١٠ سم من أ والثانى على بعد ٢٠سم من ب وعُلقِ فى القضيب ثقلان مقدارهما ٣ ، ٥ ث كجم على بُعدى ٢٠سم من أ ، ٣٠ سم من ب على الترتيب . عين الضغط على كل من الحاملين .

(٨) أ ب مسطرة طولها ٩٠ سم ووزنها ٦ نيوتن يؤثر فى نقطة منتصفها . عُلِقت فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند طرفيها . أين يعلق ثقل مقداره ١٥ نيوتن حتى يكون الشد فى أحد الخيطين مساويًا ضعف قيمته فى الخيط الآخر .

(٩) يرتكز قضيب أ ب طوله ١٠٠سم ووزنه ١٠ نيوتن ويؤثر عند نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين، أحدهما عند أ والآخر على بعد ٢٥سم من ب . ما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه عند الطرف ب للقضيب بحيث تصبح قيمة رد الفعل عند الحامل القريب من هذا الطرف مساويًا ستة أمثال قيمتها عند أ وما هما قيمتى رد الفعل عندئذ ؟

(١٠) يرتكز قضيب أ ب طوله ٨٠سم ووزنه ٣٥ نيوتن ويؤثر عند نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيه ويحمل ثقلاً مقداره ٥ نيوتن عند نقطة تبعد ٢٠سم عن ب . فى أى نقطة من القضيب يجب تعليق ثقل مقداره ٢٠ نيوتن حتى تصبح قيمة رد الفعل عند ب مساويةً ضعف قيمتها عند أ ؟ وما هى قيم ردى الفعل عندئذ ؟

(١١) قضيب أ ب طوله ٥٠ سم ووزنه ١٠ نيوتن يؤثر عند نقطة منتصفه، يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما يبعد ١٥سم عند أ والآخر يبعد ١٠سم عن ب . أوجد الضغط الواقع على كل من الحاملين . ما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب حتى يكون القضيب على وشك الدوران وما هى قيمة الضغط على الحامل عندئذ ؟

(١٢) يرتكز قضب أ ب طوله ٩٠سم ووزنه ٥٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين ، أحدهما عند الطرف أ والآخر عند نقطة تبعد ٣٠ سم عن ب ويحمل ثقلاً مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ١٥ سم عن ب . عين قيمة الضغط على كل من الحاملين، وأوجد أيضًا مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب بحيث يصبح القضيب على وشك الدوران وما هى قيمة الضغط على الحامل عندئذ أ .

(١٣) أ ب قضيب طوله ١٢٠سم ووزنه ٦٠ نيوتن يؤثر عند نقطة منتصفه، يرتكز القضيب فى وضع أفقى على حامل عند طرفه ب ويُحفظً فى حالة توازن بواسطة خيط رأسى مثبت من

نقطة فيه تبعد ٤٠سم عن الطرف أ ويحمل ثقلاً مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ٢٠سم من أ . عين قيمة كل من الشد فى الخيط والضغط على الحامل .

وما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه فى الطرف أ حتى يصبح على وشك الانفصال عن الحامل وما هى قيمة الشد فى الخيط عندئذ ؟

(١٤) قضيب منتظم طوله ١٢٠سم ووزنه ٦٠٠ ث جم يرتكز على حاملين جـ ، د المسافة بينهما ٦٠سم حيث أجـ = ٢٥سم عُلِق فى القضيب ثقل عند هـ حيث أ هـ = ٣٠سم . أوجد :

أولاً : رد الفعل عند كل من جـ ، د إذا كان الثقل المعلق عند هـ = ٢٠٠ جم .

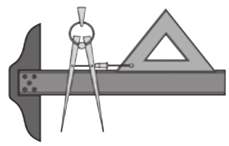
ثانيًا : مقدار الثقل المعلق عند هـ إذا كان مقدار رد الفعل عند جـ ضعف مقدار رد الفعل عند د .

(١٥) أ ب قضيب غير منتظم طوله ١٤٠سم محمول أفقيًا بخيطين رأسيين أحدهما عند ب والآخر يبعد ٤٠سم من أ ، فإذا كان الشد فى الخيط الأول $\frac{١}{٤}$ الشد فى الخيط الثانى ، فعين نقطة تأثير وزن القضيب . وإذا عُلِم أن أكبر ثقل يلزم تعليقه من أ دون أن يختل التوازن هو ١٢ نيوتن فأوجد وزن القضيب .

(١٦) أ ب قضيب غير منتظم طوله ١٢٠سم إذا ثبت عند طرفه ب ثقل قدره ١ نيوتن وعلق من أ ثقل قدره ١٦ نيوتن فأن القضيب يتزن فى هذه الحالة عند نقطة تبعد ٣٠سم من أ . وإذا انقص الثقل الموجود عند أ وصار ٨ نيوتن فأن القضيب يتزن عند نقطة تبعد ٤٠سم من أ . أوجد وزن القضيب ونقطة تأثيره .

(١٧) أ ب قضيب طوله متر واحد ووزنه ٧٠٠ ثقل جرام (يؤثر عند منتصفه) يرتكز على حامل عند طرفه ب وحفظ فى حالة توازن فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف رأسى مثبت فى نقطة على القضيب تبعد عن طرفه أ بمقدار ٣٠سم ويحمل ثقلاً مقداره ٣٥٠ ثقل جرام من نقطة تبعد ١٠سم عن أ . أوجد كلاً من الشد فى الخيط والضغط على الحامل، وإذا عُلِق من أ ثقلا جعل القضيب على وشك الانفصال عن الحامل، أوجد مقدار هذا الثقل وقيمة الشد فى الخيط عندئذ .

الفصل الرابع



الاتزان العام

- **مقدمـــة :**

ناول فى هذا الفصل اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى .

- **الأهداف :**

ى نهاية تدريس هذا الفصل ينبغى أن يكون الطالب قادراً على أن :

١ – يتعرف على متى تكون مجموعة من القوى متوازنة .

٢ – يتعرف على الشروط الكافية لاتزان مجموعة من القوى .

٣ – يتعرف على اتجاه رد فعل المفصل فى حالة اتصال أحد طرفى قضيب بمفصل .

٤ – يحل مسائل تتضمن اتزان قضيب أو سلم على أرض أفقية وحائط رأسى .

٥ – يتعرف على مقدار أقل قوة أفقية تؤثر فى الطرف السفلى لقضيب مرتكز على أرض أفقية خشنة تجعل الجسم على وشك الحركة نحو الحائط أو بعيداً عن الحائط .

- الموضوعات :

١– اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى

٢– الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى

٣– اتزان سلم أو قضيب على أرض أفقية خشنة وحائط رأسى أملس أو أرض أفقية خشنة وحائط رأسى خشن

الاتـــزان العــام

تعـريـف :

إذا انعدم مجموع القوى وانعدم عزم المجموعة بالنسبة لأى نقطة قيل أن ((مجموعة القوى متوازنة)) وإذا أثرت مثل هذه المجموعة على جسم ما ، قيل أن هذا الجسم ((متزن)) .

نظريـة :

إذا انعدم مجموع القوى لمجموعة ما وانعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة ، كانت هذه المجموعة متوازنة .

البـرهــان :

نفرض أن عزم المجموعة بالنسبة لنقطة (و) ينعدم :

بما أن متجه مجموع القوى ينعدم ($\overline{ح} = \overline{٠}$) ينتج من نظرية سابقة أن عزم المجموعة لا يتغير من نقطة لأخرى ،

فإذا انعدم هذا العزم بالنسبة لنقط (و) فإنه ينعدم بالنسبة لأى نقطة أخرى .

∴ المجموعة متوازنة .

و يكون عكس هذه النظرية صحيحاً دائماً .

و لذلك يمكن صياغة الشروط الكافية لاتزان المجموعة من القوى على النحو التالى :

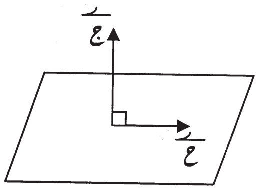
الشروط الكافية و اللازمة لاتزان مجموعة من القوى :

لكى تتوازن مجموعة من القوى يلزم و يكفى أن تتحقق الشروط التالية :

١- ينعدم متجه مجموع القوى .

٢- ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة .

وفى التطبيقات يفضل استخدام صياغة مكافئة للشروط اللازمة والكافية لاتزان مجموعة من القوى . و هو مـا سنعرضه فيما يلى :



شكل (١)

نلاحظ أولاً أن دراستنا تقتصر على مجموعة القوى المستوية ،

وأن النقط التى ننسب إليها عزوم هذه القوى واقعة أيضا فى هذا المستوى .

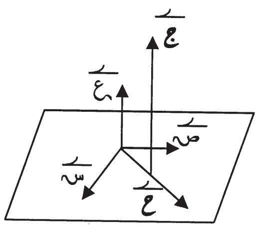
إذن ،

متجه مجموع القوى ح يقع فى مستويها .

متجه عزم المجموع ج بالنسبة لأى نقطة واقعة فى مستوى القوى يكون عموديا على هذا المستوى شكل (١) .

ندخل مجموعة من متجهات الوحدة المتعامدة (سَ ، صَ ، عَ) بحيث يقع سَ ، صَ فى مستوى القوى ،

فيكون عَ عموديا على هذا المستوى .



شكل (٢)

من الواضح أنه يمكن تحليل المتجه ح فى اتجاهى سَ ، صَ ، بينما يوازى المتجه ج متجه الوحدة عَ ، ح = س سَ + ص صَ

ج = ج عَ

حيث س = مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة فى اتجاه سَ

ص = مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة فى اتجاه صَ

ج = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى منسوبة إلى متجه الوحدة عَ نلاحظ الآن أنه إذا كان

س = ص = ج = صفر

فإن ح = ٠ ، ج = ٠

و العكس أيضا صحيح

و بما أننا نحدد اتجاهى سَ ، صَ فى المستوى ، فإنه يمكن إعطاء الصياغة المكافئة التالية للشروط اللازمة و الكافية للاتزان .

صياغة مكافئة للشروط الكافية و اللازمة لاتزان مجموعة من القوى :

لكى تتوازن مجموعة من القوى يلزم و يكفى أن تتحقق الشروط التالية :

١ – ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاهين متعامدين واقعين فى مستويها .

٢ – ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها .

و التعبير الرياضى عن الشروط الكافية و اللازمة للاتزان هو :

س = صفر

ص = صفر

ع = صفر

ملاحظـــة :

تظل الشروط اللازمة و الكافية للاتزان صحيحة فى حالة أن يكون متجها الوحدة $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ غير متعامدين .

مثـــال (١) :

قضيب منتظم مقدار وزنه ٢ ث كجم و طوله ١٠٠سم يتصل أحد طرفيه بمفصل مثبت فى حائط رأسى علق ثقل قدره ٢ ث كجم من نقطة على القضيب تبعد ٧٥سم عن المفصل وحفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة حبل رفيع يتصل بطرفه الآخر وبنقطة على الحائط تقع رأسيا أعلى المفصل . إذا كان الحبل يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° ، أوجد مقدار الشد وكذلك رد فعل المفصل .

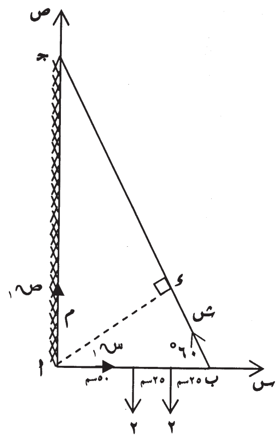
الحـــل :

يبين شكل (٣) اتزان القضيب فى وضع أفقى تحت تأثير القوى ألأربع :

١–قوة وزن القضيب ومقدارها ٢ ث كجم وتعمل رأسيا لأسفل عند نقطة منتصفه لأن القضيب منتظم .

٢–قوة وزن الثقل المعلق ومقدارها ٢ ث كجم وتعمل رأسيا عند نقطة من القضيب تبعد ٧٥سم عن المفصل .

٣-قوة الشد فى الخيط و تؤثر فى الطرف ب من القضيب ويميل خط عملها على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° وتكون موجهة نحو الحائط ليكن ش مقدار هذه القوة .



شكل (٣)

٤-قوة رد فعل المفصل وتؤثر عند طرف القضيب أ المتصل بالمفصل .

نختار اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{\text{أس}}$ ، $\overleftarrow{\text{أص}}$ لتحليل القوى ، أحدهما أفقى وموجه بعيدا عن الحائط و الثانى رأسياً لأعلى و لتكن (س~١ ، ص~١) المركبتين الجبريتين لقوة رد الفعل فى هذين الاتجاهين نكتب الآن الشروط اللازمة و الكافية لاتزان القضيب .

انعدام مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أس}}$:

س~١ - ش جتا ٦٠° = ٠ (١)

انعدام مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أص}}$:

ص~١ + ش جا ٦٠° - ٢ - ٢ = ٠ (٢)

انعدام مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة ولتكن هى نقطة أ :

ش × أى - ٢ × ٥٠ - ٢ × ٧٥ = ٠ (٣)

حيث أى طول العمود الساقط من النقطة أ على $\overline{\text{بجـ}}$

ولكن أى = أب جا ٦٠° = ١٠٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ سم

بالتعويض فى (٣) نجد

ش × $\frac{١٠٠\sqrt{٣}}{٢}$ - ٢ × ٥٠ - ٢ × ٧٥ = ٠

و منها نجد قيمة ش = $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$ ث كجم

بالتعويض بهذه القيمة فى (١) نجد

س~١ = ش جتا ٦٠°

= $\frac{٥}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{٢} = \frac{٥}{٢\sqrt{٣}}$ ث كجم

و من (٢) نجد

ص~١ = ٤ - ش جا ٦٠° = ٤ - $\frac{٥}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٣}{٢}$ ث كجم

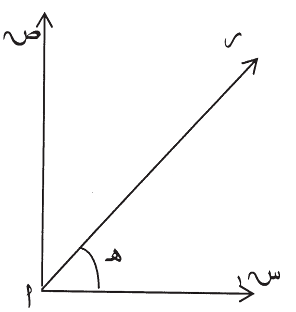
يمكن الآن تعيين مقدار اتجاه قوة رد فعل المفصل إذا كان $ر$ هو مقدار هذه القوة ، هـ قياس زاوية ميل خط عملها على $\overleftarrow{أس}$ شكل (٤) فإن

$$ر = \sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢} = \sqrt{\left(\frac{٥}{٢\sqrt{٣}}\right)^٢ + \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢}$$

$$= \frac{١}{٢}\sqrt{\frac{٥٢}{٣}} = \sqrt{\frac{١٣}{٣}} \text{ ث كجم}$$

$$\text{ظا هـ} = \frac{ص_١}{س_١} = \frac{\frac{٣}{٢}}{\frac{٥}{٢\sqrt{٣}}} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٥}$$

$$\text{هـ} \simeq ٤٦° \; ٧'$$



شكل (٤)

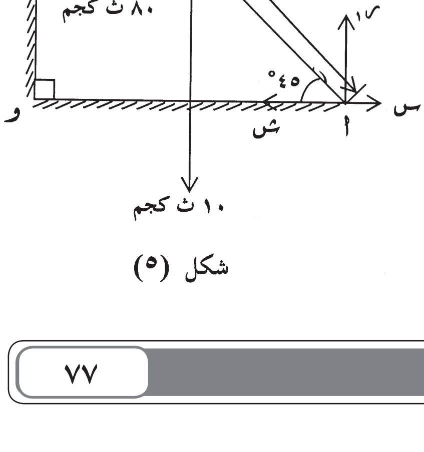
مثـــال (٢) :

يرتكز سلم منتظم وزنه ١٠ ث كجم بطرفه أ على مستوى أفقى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس . حفظ السلم فى مستوى رأسى وفى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقى تقع رأسيا أسفل ب . يصعد رجل وزنه ٨٠ ث كجم هذا السلم . عين قوة الشد فى الحبل عندما يكون الرجل قد قطع $\frac{٣}{٤}$ طول السلم .

أوجد كذلك أقصى قيمة للشد يتحملها هذا الحبل إذا علم أنه كان على وشك الانقطاع عندما وصل الرجل إلى قمة السلم .

الحـــل :

نلاحظ أن وزن السلم يعمل فى منتصفه ليكن ل طول السلم ، ش الشد فى الخيط ، $ر_١$ رد فعل المستوى عند الطرف أ ، $ر_٢$ رد فعل الحائط عند الطرف ب نعتبر المستوى الرأسى الذى يتزن فيه السلم ونأخذ فيه اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{وس}$ ، $\overleftarrow{وص}$ كما فى شكل (٥) حيث و نقطة فى المستوى الأفقى تقع رأسيا أسفل ب . نفرض أن الرجل قد صعد مسافة س على السلم .



شكل (٥)

تحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{وس}$:

$$ر_٢ - ش = ٠$$

$$\therefore ش = ر_٢ \qquad (١)$$

بدراسة العزوم حول أ :

$$- ر_٢ \times ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ١٠ \times \frac{١}{٢} ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ٨٠ \times س \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٠$$

$$ر_٢ = ٥ + ٨٠ \times \frac{س}{ل}$$

و من (١) :

$$ش = ٥ + ٨٠ \frac{س}{ل}$$

نلاحظ أن قيمة الشد تزداد كلما تزايدت قيمة س ، أى كلما صعد الرجل لمسافة أكبر على السلم عندما يكون الرجل قد قطع $\frac{٣}{٤}$ من طول السلم فإن $\frac{س}{ل} = \frac{٣}{٤}$

$\therefore$ ش = ٥ + ٨٠ × $\frac{٣}{٤}$ = ٦٥ ث كجم .

لتعيين أقصى قيمة للشد يتحملها الحبل ، نعتبر الوضع الذى يكون فيه الرجل عند قمة السلم .

$$\frac{س}{ل} = ١$$

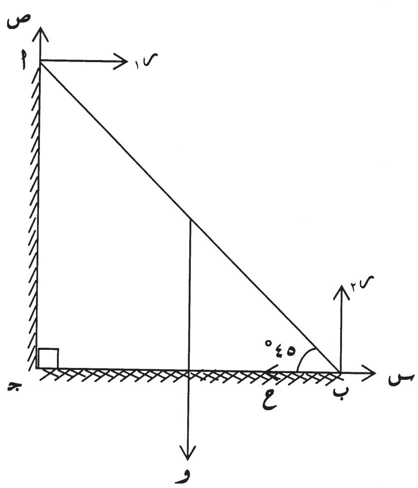
ش = ٥ + ٨٠ × ١ = ٨٥ ث كجم

مثــال (٣) :

يستند قضيب منتظم وزنه و بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس وبطرفه الثانى عل أرض أفقية خشنة بحيث يقع فى مستوى رأسى ويميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° . إذا كان القضيب متزنا ، أثبت أن معامل الاحتكاك بين القضيب والأرض لا يمكن أن يكون أقل من $\frac{١}{٢}$ وإذا كان معامل الاحتكاك يساوى $\frac{٣}{٤}$ فعين القوة الأفقية التى تؤثر عند طرف القضيب الملامس للأرض وتجعله على وشك الحركة :

(أولاً) نحو الحائط (ثانياً) بعيداً عن الحائط

الحـل :



شكل (٦)

ليكن أب القضيب ، ل طوله ، ر١ قوة رد الفعل عند الطرف أ المستند على الحائط الأملس ، ر٢ قوة رد الفعل العمودى عند الطرف ب المستند على الأرض الخشنة ، ع قوة الاحتكاك عند ب

نعتبر المستوى الرأسى الذى يتزن فيه القضيب ونأخذ فيه اتجاهين متعامدين $\overleftarrow{جـ س}$ ، $\overleftarrow{جـ ص}$ كما فى شكل (٦) ، حيث جـ نقطة على الأرض الأفقية تقع رأسيا أسفل أ نلاحظ هنا أن الاتجاه المحتمل لحركة الطرف ب يكون بعيدا عن الحائط وبالتالى يجب أن تكون قوة الاحتكاك موجهة نحو الحائط .

تحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{جـ س}$:

ر١ − ع = ٠

$\therefore$ ع = ر١ (١)

تحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{جـ ص}$:

ر٢ − و = ٠

ر٢ = و (٢)

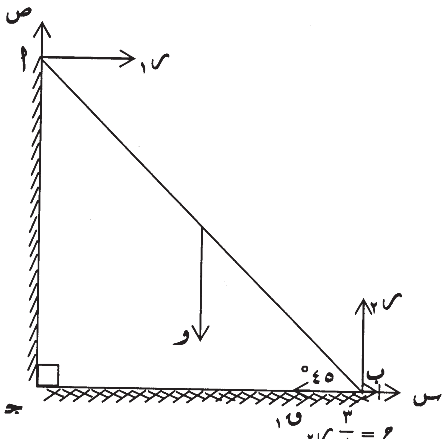
دراسة العزوم حول نقطة ب :

$$-\text{ر}_{١} \times \frac{\text{ل}}{\sqrt{٢}} + \text{و} \times \frac{\text{ل}}{٢\sqrt{٢}} = ٠$$

$$\therefore \ \text{ر}_{١} = \frac{\text{و}}{٢} \qquad (٣)$$

من (١) ، (٢) ينتج أن :

$$\text{ح} = \frac{\text{و}}{٢} \qquad (٤)$$



شكل (٧)

ليكن م معامل الاحتكاك . نعرف أن $\text{ح} \leq \text{م}\,\text{ر}_{٢}$

بالتعويض فى هذه المتباينة عن كل من $\text{ر}_{٢}$ ، ح

من (٢) ، (٤) نجد :

$$\frac{\text{و}}{٢} \leq \text{م}\,\text{و} \qquad\qquad \text{م} \geq \frac{١}{٢}$$

و هو المطلوب إثباته

نفرض الآن أن $\text{م} = \frac{٣}{٤}$

(أولاً) القضيب على وشك الحركة نحو الحائط :

نفرض أن $\text{ق}_{١}$ مقدار القوة المطلوبة تكون هذه القوة موجهة نحو الحائط كما يبين شكل (٧) أما قوة الاحتكاك ، فيكون اتجاهها بعيدا عن الحائط أما مقدارها فيساوى $\frac{٣}{٤}\,\text{ر}_{٢}$ (الاحتكاك نهائى)

تحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{جـس}}$:

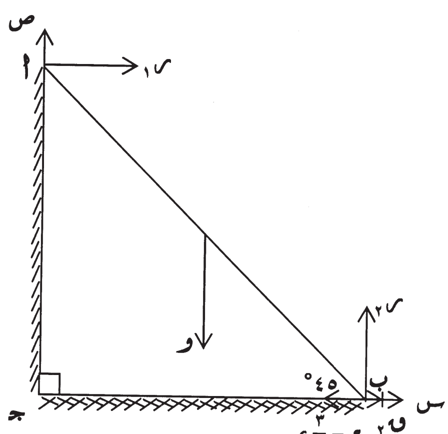
$$\text{ح} - \text{ق}_{١} + \text{ر}_{١} = ٠$$

$$\frac{٣}{٤}\,\text{ر}_{٢} - \text{ق}_{١} + \text{ر}_{١} = ٠ \qquad (٥)$$

أما تحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{جـص}}$ وأخذ العزوم حول نقطة ب فيعطيان نفس المعادلتين (٢) ، (٣) بالتعويض عن $\text{ر}_{١}$ ، $\text{ر}_{٢}$ من (٢) ، (٣) ، (٥) نجد :

$$\frac{٣}{٤}\,\text{و} - \text{ق}_{١} + \frac{١}{٢}\,\text{و} = ٠$$

$$\text{ق}_{١} = \frac{٥}{٤}\,\text{و}$$



شكل (٨)

(ثانيا) القضيب على وشك الحركة بعيداً عن الحائط :

نفرض أن $\text{ق}_{٢}$ مقدار القوة المطلوبة تكون هذه القوة موجهة بعيداً عن الحائط شكل (٨) أما قوة الاحتكاك فتكون موجهة نحو الحائط و يساوى مقدارها $\frac{٣}{٤}\,\text{ر}_{٢}$

تحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{جس}}$:

$$\text{ق}_٢ - \text{ح} + \text{ر}_١ = ٠$$

$$\text{ق}_٢ - \frac{٣}{٤}\text{ر}_٢ + \text{ر}_١ = ٠$$

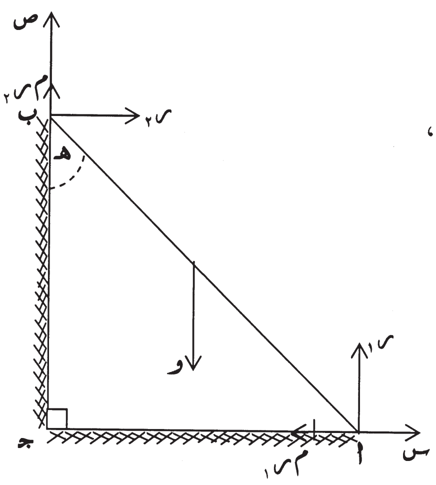
هنا أيضا يتحقق المعادلتان (٢) ، (٣)

$$\text{ق}_٢ - \frac{٣}{٤}\text{و} + \frac{\text{و}}{٢} = ٠ \qquad\qquad \text{ق}_٢ = \frac{١}{٤}\text{و}$$

مثال (٤) :

يتزن سلم منتظم فى مستوى رأسى على حائط رأسى وأرض أفقية ، إذا كان قياس زاوية الاحتكاك بين السلم وكل من الحائط والأرض هى ل فاثبت أن قياس زاوية ميل السلم على الرأسى عندما يكون على وشك الانزلاق هـ= ٢ل

الحـل :



شكل (٩)

ليكن وزن السلم و ، س طوله ، هـ قياس زاوية ميله على الرأسى ،

رد الفعل العمودى عند الطرف أ الملامس للأرض مقداره $\text{ر}_١$ ،

رد الفعل العمودى عند الطرف ب الملامس للحائط مقداره $\text{ر}_٢$

، م معامل الاحتكاك بين السلم وكل من الأرض والحائط .

بما أن الانزلاق المحتمل للسلم يجعل الطرف أ يتحرك بعيداً عن الحائط والطرف ب يقترب من الأرض فإن قوة الاحتكاك النهائى عند أ تكون موجهة نحو الحائط ومقدارها $\text{م ر}_١$

، بينما تكون قوة الاحتكاك النهائى عند ب موجهة بعيداً عن الأرض ومقدارها $\text{م ر}_٢$.

نعتبر المستوى الذى يتزن فيه السلم ونأخذ فيه $\overleftarrow{\text{جس}}$ ، $\overleftarrow{\text{جص}}$ المتعامدين لتحليل القوى كما فى شكل (٩)

حيث ج نقطة على الأرض تقع رأسياً أسفل الطرف ب .

تحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{جس}}$:

$$\text{ر}_٢ - \text{م ر}_١ = ٠ \qquad (١)$$

تحليل القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{جص}}$:

$$\text{ر}_١ + \text{م ر}_٢ - \text{و} = ٠ \qquad (٢)$$

من (١) : $\text{ر}_٢ = \text{م ر}_١$ وبالتعويض فى (٢) نجد

$$\text{ر}_١(١ + \text{م}^٢) = \text{و} \qquad (٣)$$

بدراسة العزوم حول ب :

$$\text{ر}_{١} \times \text{س جاهـ} - \text{م ر}_{١} \times \text{س جتاهـ} - \frac{\text{و}}{٢} \text{س جاهـ} = ٠$$

وبالقسمة على س جاهـ : (حيث س طول السلم)

$$\text{ر}_{١}(١ - \text{م ظتاهـ}) = \frac{\text{و}}{٢} \qquad (٤)$$

وبقسمة (٣) ، (٤)

$$\frac{١ + \text{م}^{٢}}{١ - \text{م ظتاهـ}} = ٢ \qquad \text{ظتا هـ} = \frac{١ - \text{م}^{٢}}{٢\text{م}}$$

ولكن م = ظا ل حيث ل قياس زاوية الاحتكاك

$$\text{ظتا هـ} = \frac{١ - \text{ظا}^{٢}\text{ل}}{٢\text{ظا ل}} = \text{ظتا٢ل}$$

$\text{هـ} = ٢\text{ل}$ وهو المطلوب إثباته

تمــارين (٤)

١- يرتكز سلم منتظم مقدار وزنه و بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس . وبطرفه الآخر على مستوى أفقى أملس وحفظ السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل مثبت فى قاعدة السلم وفى نقطة من المستوى تقع رأسيا أسفل قمة السلم وقف رجل وزنه و على السلم عند موضع يبعد $\frac{٣}{٤}$ طول السلم من ناحية القاعدة . عين قوة الشد فى الحبل وقوتى ردى فعل الحائط والمستوى .

٢- أب سلم مقدار وزنه ٢٠ ث كجم يرتكز بطرفه أ على مستوى أفقى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس. حفظ السلم على مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى تقع رأسيا أسفل ب ولا يتحمل شد أكبر من ٥٠ ث كجم .

صعد رجل مقدار وزنه ٦٠ ث كجم على السلم فلما قطع $\frac{٣}{٤}$ طوله وجد أن الحبل على وشك الانقطاع عين نقطة على السلم التى يؤثر عندها وزنه .

٣- أب سلم منتظم وزنه ٢٠ ث كجم يرتكز بطرفه أ على مستوى أفقى أملس و بطرفه ب على حائط رأسى أملس ، حفظ السلم فى مستوى رأسى فى حالة اتزان بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى تقع رأسيا أسفل ب . وإذا كان السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° وكان الحبل لا يتحمل شد أكبر من ٢٥ث كجم ، فاثبت أن رجلا وزنه يساوى وزن السلم لا يستطيع أن يصعد أكثر من $\frac{٣}{٤}$ طول السلم دون أن ينقطع الحبل .

٤- أب سلم طوله ٣ أمتار ومقدار وزنه ٣٥ ث كجم يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على مستوى أفقى أملس . حفظ السلم فى حالة توازن فى مستوى رأسى بواسطة حبل يصل الطرف ب بنقطة فى المستوى الأفقى تقع رأسيا أسفل أ . أوجد مقدار الشد فى الحبل إذا علم أن بعد الطرف ب عن الحائط ١,٨متر و أن قوة وزن السلم تعمل فى نقطة منه تبعد ١,٢ متر عن ب . ماذا يكون الشد فى الحبل إذا وقف رجل مقدار وزنه ٨٠ ث كجم على السلم عند منتصفه .

٥- **أب** قضيب منتظم طوله ١٢٠سم و مقدار وزنه ٤ نيوتن يتصل بطرفه **أ** بمفصل مثبت فى حائط رأسى علق ثقل قدره ٣ نيوتن فى نقطة من القضيب تبعد ٨٠سم عن **أ** وحفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة حبل يتصل أحد طرفيه بالطرف **ب** للقضيب ويتصل طرفه الآخر بنقطة على الحائط تبعد ١٦٠سم رأسيا أعلى **أ** . أوجد مقدار الشد فى الخيط ومقدار قوة رد فعل المفصل .

٦- قضيب منتظم **أب** طوله ٢٠٠سم ومقدار وزنه ١٠ نيوتن يتصل طرفه**أ** بمفصل مثبت فى حائط رأسى ويحمل عند طرفه **ب** ثقلا يساوى وزنه حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة حبل يتصل أحد طرفيه بنقطة على القضيب تبعد ١٥٠سم عن **أ** والطرف الآخر بنقطة على الحائط رأسيا أعلى **أ** ، فإذا كان الحبل يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ، عين مقدار الشد فيه وكذلك مقدار قوة رد فعل المفصل .

٧- **أب** قضيب منتظم مقدار وزنه ٢٠٠ نيوتن يتصل طرفه **أ** بمفصل مثبت فى حائط رأسى ويحمل عند طرفه **ب** ثقلا قدره ١٠٠ نيوتن . حفظ القضيب فى وضع يميل فيه على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° بواسطة حبل مساو للقضيب فى الطول يتصل أحد طرفيه بالطرف **ب** للقضيب ويتصل طرفه الآخر بنقطة **ء** من الحائط تقع رأسيا أعلى **أ** وعلى بعد منها يساوى طول القضيب . أوجد مقدار الشد فى الحبل وقوة رد فعل المفصل .

٨- قضيب منتظم يرتكز فى مستوى رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس و بطرفه السفلى على مستوى أفقى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٣}$ ، أوجد زاوية ميل القضيب على الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق .

٩- سلم منتظم مقدار وزنه ٢٠ ث كجم يرتكز بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة وبالطرف الآخر على حائط رأسى أملس . اتزن السلم فى مستوى رأسى وكان قياس زاوية ميله على الأفقى ٦٠° إذا علم أن معامل الاحتكاك بين السلم و الأرض يساوى $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$ ، أثبت أن أقصى مسافة يستطيع رجل مقدار وزنه ٦٠ث كجم أن يصعدها على السلم تساوى نصف طول السلم .

١٠- قضيب منتظم مقدار وزنه ١٥ نيوتن يرتكز بطرفه السفلى على أرض أفقية وبطرفه العلوى على حائط رأسى أملس . اتزن القضيب فى مستوى رأسى وكان على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٣٠° . أوجد معامل الاحتكاك بين القضيب والأرض وكذلك مقدار رد فعل الحائط عليه .

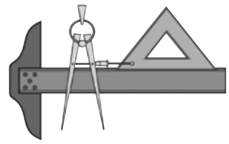
١١- أب قضيب منتظم طوله ٢٦٠سم ومقدار وزنه و . يستند بطرفه أ على حائط رأسى أملس وبطرفه ب على أرض أفقية معامل الاحتكاك بينها وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٢}$. اتزن القضيب فى مستوى رأسى بحيث كان الطرف ب على بعد ١٠٠سم من الحائط . أوجد مقدار القوة الأفقية التى إذا أثرت عند الطرف ب جعلت القضيب على وشك الحركة نحو الحائط .

١٢- قضيب منتظم يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٢}$ وبطرفه السفلى على مستوى أفقى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{٣}{٤}$. أوجد زاوية ميل القضيب على الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق .

١٣- قضيب منتظم مقدار وزنه ٤٠ نيوتن يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى معامل الاحتكاك بينه وبين القضيب يساوى $\frac{١}{٢}$ وبطرفه الآخر على أرض أفقية معامل الاحتكاك بينها وبين القضيب تساوى $\frac{١}{٣}$ فإذا كان القضيب يتزن فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° ، أوجد مقدار أقل قوة أفقية تجعل الطرف السفلى للقضيب على وشك الحركة نحو الحائط .

١٤- يستند سلم منتظم بأحد طرفيه على حائط رأسى معامل الاحتكاك بينه وبين السلم يساوى $\frac{١}{٣}$ وبطرفه الآخر على أرض أفقية من نفس خشونة الحائط . فإذا اتزن السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه السلم على الحائط بزاوية ظلها $\frac{٦}{١١}$ ، برهن على أن رجلا وزنه يساوى ثلاثة أمثال وزن السلم لا يمكنه الصعود أكثر من $\frac{٧}{١٠}$ طول السلم دون أن يتزلق السلم .

الفصل الخامس



الازدواجـــات

Couples

■ **مقدمة :**

يتناول هذا الفـصل تعـريف الازدواج ، ومـفـهـوم إتزان جـسم تحت تأثيـر ازدواجين ، ومـحـصلة مـجـمـوعـة من الازدواجـات ، وهـو من الموضـوعـات الحياتية التى يشاهدها الطالب فى حياته عندما يفتح صنبور المياه أو عندما يفك مسامير عجلة السيارة عند تغييرها .

■ **الأهداف :**

فى نهاية تدريس هذا الفصل ينبغى أن يكون الطالب قادرًا على أن :

١- يتعرف مفهوم الازدواج .

٢- يحسب عزم الازدواج .

٣- يستنتج أن عزم الازدواج هو متجه ثابت .

٤- يتعرف مفهوم إتزان جسم تحت تأثير ازدواجين مستويين .

٥- يوجد محصلة عدة ازدواجات .

٦- يحل مسائل حياتية على الازدواجات .

● **الموضوعات :**

١) الازدواج (مفهومه - تعريفه - حساب عزمه) .

٢) اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين .

٣) مجموع ازدواجين مستويين .

٤) مجموع أى عدد محدود من الازدواجات .

الازدواجـــــــات

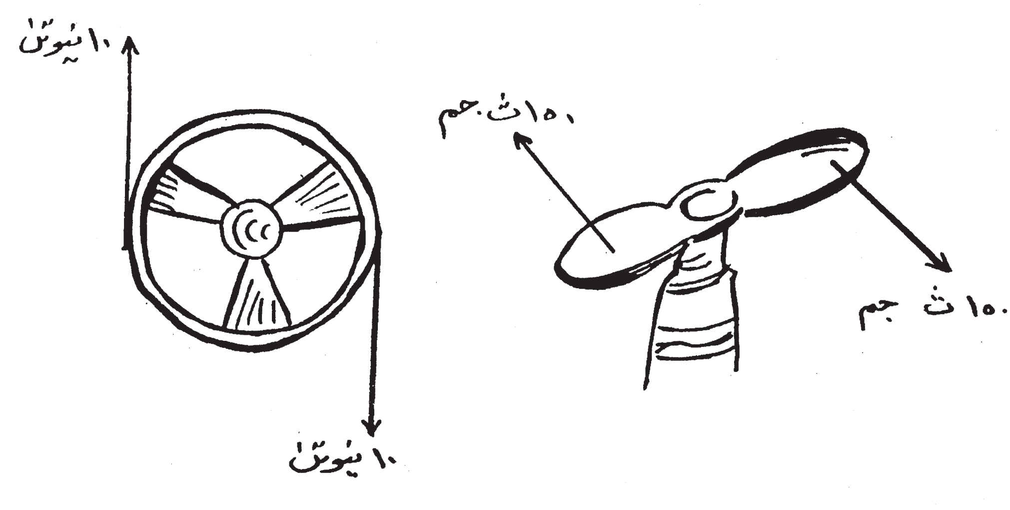
يعتبر مفهوم الازدواج من المفاهيم الأساسية فى الميكانيكا ، وسيخصص الفصل الخامس لعرض مفهوم الازدواج وكذلك أهم خصائصه والنظريات الأساسية المتعلقة به .

تعريف :

الازدواج هو مجموعة قوى تتكون من قوتين متساويتين فى المعيار ومتضادتين فى الاتجاه ولا يجمعهما خط عمل واحد .

ويعتبر الشرط الأخير فى تعريف الازدواج هامًا للغاية إذ أن انطباق خطى العمل يعنى أن الجسم الواقع تحت تأثير القوتين متزن . أما إذا لم ينعدم البعد العمودى بين خطى العمل، فأن الجسم لا يكون متزنا ، كما تدل على ذلك خبرتنا اليومية .

يبين شكل (٧٥) مثالين للازدواج .

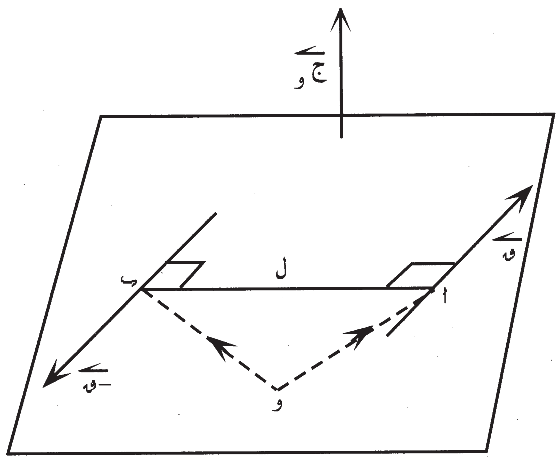


إدارة عجلة قيادة سيارة بواسطة إزدواج — إدارة صنبور للمياه بواسطة إزدواج

شكل (٧٥)

عزم الازدواج :

لتكن $\overleftarrow{ق}$ ، $-\overleftarrow{ق}$ القوتين المكونتين للازدواج ، $\|\overleftarrow{ق}\| = ق$



شكل (٧٦)

نرسم عموداً مشتركًا على خطى عمل القوتين ونفرض أنه يقطعهما فى النقطتين أ ، ب على الترتيب ، وأن ل = أ ب هو البعد العمودى بين خطى العمل شكل (٧٦) .

نحسب مجموع عزمى قوتى الازدواج بالنسبة لنقطة اختيارية (و) .

$$\overleftarrow{\text{ج}}_{\text{و}} = \overleftarrow{\text{و أ}} \times \overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{و ب}} \times (- \overleftarrow{\text{ق}})$$

$$= (\overleftarrow{\text{و أ}} - \overleftarrow{\text{و ب}}) \times \overleftarrow{\text{ق}}$$

$$= \overleftarrow{\text{ب أ}} \times \overleftarrow{\text{ق}}$$ (راجع مثلث المتجهات و أ ب على الشكل)

ولما كانت النقطتان أ ، ب لاتعتمدان على موضع نقطة (و) التى ننسب إليها العزم، فأن مجموع عزمى قوتى الازدواج لا يتوقف على موضع (و) . وهو بهذا المعنى متجه ثابت يسمى عزم الازدواج .

وسنرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{ج}}$

لدينا إذن :

$$\boxed{\overleftarrow{\text{ج}} = \overleftarrow{\text{ب أ}} \times \overleftarrow{\text{ق}} = \overleftarrow{\text{أ ب}} \times (- \overleftarrow{\text{ق}})}$$

مما يعنى أن عزم الازدواج يساوى عزم إحدى قوتى الازدواج بالنسبة لنقطة على خط عمل القوة الأخرى .

ملاحظة :

لا يتغير عزم الازدواج إذا استبدلت بالنقطة أ أى نقطة أخرى على خط عمل القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ وبالنقطة ب أى نقطة أخرى على خط عمل القوة ($- \overleftarrow{\text{ق}}$)

نصيغ نتائجنا فى النظرية الأساسية الآتية :

نـظـريـــة :

عزم الازدواج هو متجه ثابت ، لا يعتمد على النقطة التى ننسب إليها عزمى قوتيه ويساوى عزم إحدى قوتى الازدواج بالنسبة لنقطة على خط عمل القوة الأخرى .

معيار واتجاه عزم الازدواج :

بما أن المتجه $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ عمودى على المتجه $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ٩٠°

$\therefore \quad \| \overleftarrow{\text{ج}} \| = \| \overleftarrow{\text{ب أ}} \| \, \| \overleftarrow{\text{ق}} \| \, . \text{ جا } ٩٠°$

$$\boxed{\| \overleftarrow{\text{ج}} \| = \text{ق ل}}$$

أى أن «معيار عزم الازدواج يساوى حاصل ضرب معيار إحدى القوتين فى البعد العمودى بين خطى عملهما» .

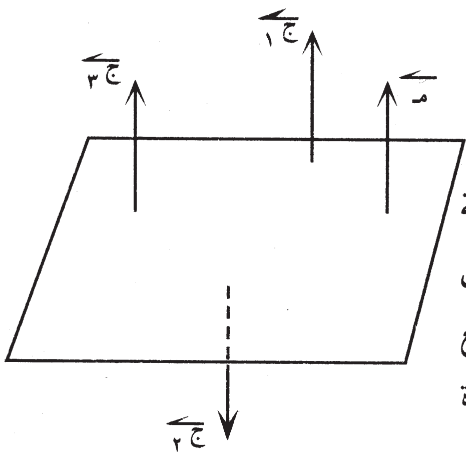
مـلاحظـة :

يطلق اسم «ذراع الازدواج» على البعد العمودى ل بين خطى عمل قوتى الازدواج .

ويلاحظ أن عزم الازدواج يكون عموديًا على كل من المتجهين $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$ أى على المستوى الذى يجمع خطى عمل القوتين . أما اتجاه هذا العزم ، فيتحدد طبقًا لقاعدة تحديد اتجاه حاصل الضرب الاتجاهى للمتجهين $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}$.

الازدواجات المستوية :

إذا أثر على جسم متماسك عدد من الازدواجات، وكانت خطوط عمل قوى هذه الازدواجات واقعة كلها فى مستو واحد، قيل لهذه الازدواجات إنها تكون مجموعة إزدواجات مستوية، وستقتصر دراستنا التالية على الازدواجات المستوية .



شكل (٧٧)

يتضح مما تقدم أن عزوم مجموعة الازدواجات المستوية تكون كلها متوازية وعمودية على مستوى القوى شكل (٧٧) ، مما يسهل من دراستنا نظراً لامكانية التعامل مع القياسات الجبرية لهذه العزوم (منسوبة إلى متجه وحدة يوازيها) بدلاً من التعامل مع متجهات العزوم ذاتها .

وإذا أخذنا $\overleftarrow{مـ}$ متجه وحدة عموديا على مستوى القوة فإنه يمكن كتابة عزم أى إزدواج من مجموعة الازدواجات المستوية بدلالة $\overleftarrow{مـ}$ كالآتى :

$$\overleftarrow{ج} = ج \, \overleftarrow{مـ}$$

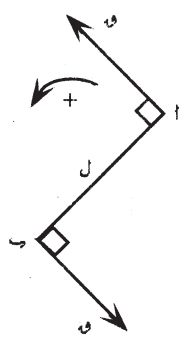
حيث ج القياس الجبرى للعزم $\overleftarrow{ج}$ بالنسبة لمتجه الوحدة $\overleftarrow{مـ}$

ولما كنا سنكتفى بالتعامل مع القياسات الجبرية لعزوم الازدوجات المستوية، فإننا سنغفل ذكر متجه الوحدة $\overleftarrow{مـ}$ ونتفق على تحديد إشارة القياس الجبرى لعزم الازدواج وفقا للقاعدة الآتية :

قاعدة :

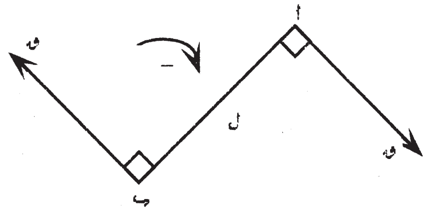
إذا وجد المشاهد الذى ينظر إلى مستوى القوى أن الازدواج يعمل على الدوران فى عكس اتجاه عقارب الساعة ، اعتبر القياس الجبرى لعزمه موجبًا شكل (٧٨ - أ) .

أما إذا وجد المشاهد الازدواج يعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة ، اعتبر القياس الجبرى لعزمه سالبًا شكل (٧٨ - ب)



شكل (٧٨ - أ)

الازدواج يعمل على الدوران فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة $\overleftarrow{ج}$ فى اتجاه $\overleftarrow{مـ}$ ، ج > صفر



شكل (٧٨ - ب)

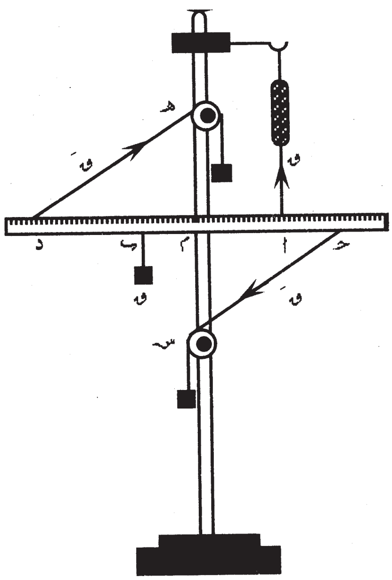
الازدواج يعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة $\overleftarrow{ج}$ فى اتجاه $\overleftarrow{مـ}$ ، ج < صفر

اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين :

تجربـــة (٣) :

الغرض من التجربة :

بيان أنه إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين كان عزما هذين الازدواجين متساويين فى المعيار ومتضادين فى الاتجاه .


شكل (٧٩)

وصف الجهاز :

يتركب الجهاز من حامل - بكرتين - مسطرة بها ثقوب - ميزان زنبركى حساس - ثلاثة حوامل - أثقال - محور ارتكاز - خيوط - ركاب معدنى صغير .

خطوات العمل :

١- ثبت بكرتين متساويتين فى الحامل بحيث يكون بعدا مركزيهما عن محور ارتكاز المسطرة متساويين .

٢- ضع المسطرة على محور الارتكاز عند منتصفها م وإذا لم تتزن فى وضع أفقى ضع عليها ركابًا معدنيًا صغيراً وحركة حتى تتزن فى وضع أفقى وتأكد من ذلك بواسطة ميزان تسوية .

٣- ثبت خيطًا عند أ يتصل بميزان زنبركى مثبت فى الحامل بحيث يكون الخيط رأسيًا .

٤- خذ نقطة مثل ب تبعد عن محور الارتكاز بُعداً يساوى بُعد النقطة أ عنه أى أن د أ = م ب وثبت فى ب خيطا يحمل ثقلاً .

٥- خذ نقطتين مثل جـ ، د متساويتى البعد عن م أى أن م جـ = م د

٦- ثبت فى كل منهما خيطًا يمر فوق بكرة ويحمل أثقالاً كما فى الشكل .

٧- ضع أثقالاً متساوية فى الحاملين عند هـ ، س وغير من قيمتيهما (بحيث يظلان متساويين) إلى أن تتزن المسطرة فى وضع أفقى .

٨- قارن بين الثقل المعلق عند ب والشد فى الميزان تجدهما متساويين ونفرض أن قيمة كل منهما ق .

٩- أوجد كلاً من القوتين المتساويتين المؤثرتين فى جـ ، د ونفرض أن كل منهما ق َ .

١٠- أوجد البعد بين القوتين ق َ، ق َ وليكن ع َ .

١١- ثبت طرف خيط عند محور الارتكاز د وأمسك بأحدى نقطة وحركة حتى تعرف أقصر بعد للنقطة م عن أحد الخيطين المائلين جـ س ، د هـ كما فى شكل (٧٩) فيكون هذا البعد هو نصف البعد بين الخيطين المائلين ونفرض أن البعد بينهما يساوى ع .

* قارن بين حاصل ضرب ق × ع وحاصل ضرب ق َ × ع َ نجد أنهما متساويان .

* كرر التجربة عدة مرات بتغيير قيمتى ق ، ق .

* أوجد الخطأ المئوى فى نتائج التجربة .

* * * *

استناداً إلى التجربة السابقة ، يمكن إعطاء التعريف الآتى لتوازن ازدواجين مستويين :

تعريف :

يقال لجسم متماسك أنه متزن تحت تأثير ازدواجين مستويين، إذا كان مجموع عزميهما هو المتجه الصفرى .

إذا كان $\overleftarrow{ج_{١}}$ ، $\overleftarrow{ج_{٢}}$ عزمى الازدواجين ، فأن شرط توازن الجسم تحت تأثير الازدواجين يكتب على الصورة :

$$\overleftarrow{ج_{١}} + \overleftarrow{ج_{٢}} = \overleftarrow{٠} \quad \text{أو أن} \quad \overleftarrow{ج_{١}} = -\overleftarrow{ج_{٢}}$$

ولما كان $\overrightarrow{ج_1} = ج_1 \, \overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ج_2} = ج_2 \, \overrightarrow{م}$

حيث أن $ج_1$، $ج_2$ القياسان الجبريان لمتجهى العزم $\overrightarrow{ج_1}$ ، $\overrightarrow{ج_2}$ على الترتيب بالنسبة لمتجه الوحدة $\overrightarrow{م}$

فإن $\overrightarrow{ج_1} + \overrightarrow{ج_2} = ج_1 \, \overrightarrow{م} + ج_2 \, \overrightarrow{م}$

$= (ج_1 + ج_2) \, \overrightarrow{م}$

وعلى ذلك ، ينعدم المجموع ($\overrightarrow{ج_1} + \overrightarrow{ج_2}$) إذا انعدم مجموع القياسين الجبريين $(ج_1 + ج_2)$ والعكس صحيح أيضًا ، فنحصل على النتيجة الآتية :

نتيجـة :

يتزن جسم تحت تأثير ازدواجين مستويين إذا انعدم مجموع القياسين الجبريين لمتجهى عزمى الازدواجين .

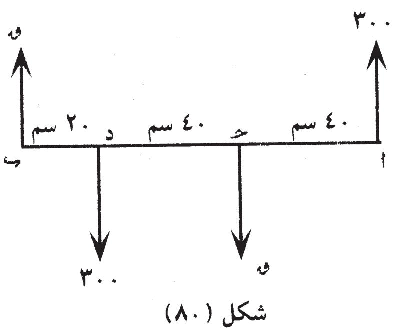
$$\therefore \; ج_1 + ج_2 = \text{صفر}$$

مثال (١) :

$\overline{أ ب}$ قضيب مهمل الوزن طوله ١٠٠سم ، جـ ، د نقطتان عليه تبعدان عن الطرف أ مسافة ٤٠ ، ٨٠سم على الترتيب . أثرت قوى مقاديرها ٣٠٠ ، ق ، ٣٠٠ ، ق نيوتن عند النقط أ ، جـ ، د ، ب على الترتيب عمودية على القضيب بحيث كانت القوتان عند أ ، ب فى اتجاه واحد، والقوتان الأخرين فى الاتجاه المضاد . عين قيمة ق بحيث يتوازن القضيب .

الحـل

يتوازن القضيب تحت تأثير ازدواجين : ازدواج يتكون من القوتين ٣٠٠ ، ٣٠٠ نيوتن عند أ ، د وليكن $ج_1$ القياس الجبرى لعزمه، وازدواج آخر يتكون من القوتين ق ، ق نيوتن عند جـ ، ب وليكن $ج_2$ القياس الجبرى لعزمه بالرجوع إلى شكل (٨٠) .



شكل (٨٠)

∴ ج$_{1}$ = ٣٠٠ × ٨٠ = ٢٤٠٠٠ نيوتن . سم

∴ ج$_{2}$ = - ق × ٦٠ = - ٦٠ ق

بما أن القضيب متزن ، يجب أن يتوازن الازدواجان

∴ ج$_{1}$ + ج$_{2}$ = صفر

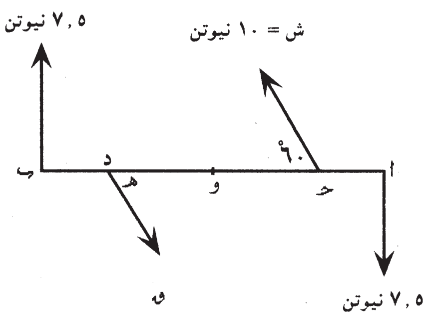
∴ ٢٤٠٠٠ - ٦٠ ق = صفر

∴ ق = $\frac{٢٤٠٠٠}{٦٠}$ = ٤٠٠ نيوتن

مثال (٢) :

$\overline{\text{أ ب}}$ قضيب مهمل الوزن معلق أفقيًا من مسمار فى منتصفه . أثرت قوتان مقدار كل منهما ٧,٥ نيوتن فى طرفيه أحداهما رأسيةً إلى أعلى والأخرى رأسيةً إلى أسفل كما شد بخيط يميل عليه بزاوية ٦٠° من نقطة عليه مثل جـ . أوجد مقدا واتجاه ونقطة تأثير القوة التى إذا أثرت على القضيب مع القوى السابقة حفظته فى حالة توازن وهو أفقى علمًا بأن الشد فى الخيط يساوى ١٠نيوتن وأن طول القضيب ٣٠سم .

الحـــل



شكل (٨١)

القـوتـان ٧,٥ ، ٧,٥ نيــوتن عند الطرفين أ ، ب تكونان ازدواجًا يساوى القياس الجبرى لعزمه :

ج$_{1}$ = - ٧,٥ × ٣٠ = - ٢٢٥ نيوتن . سم

لكى يتـزن الجسم يجب أن يؤثر عليـه ازدواج عـزمـه يساوى فى المقدار ويضاد فى الاتجاه الازدواج الأول، فأن الشد ش والقوة ق يكوِّنان ازدواجًا يضاد عزمه عزم الازدواج الأول .

∴ ق = ش = ١٠ نيوتن ، ق ($\hat{\text{هـ}}$) = ٦٠°

القياس الجبرى لعزم هذا الازدواج ج$_{2}$ = ١٠ × جـ د حا ٦٠° = ٥$\sqrt{٣}$ جـ د

$\therefore$ ج$_1$ + ج$_2$ = صفر

$\therefore$ ٥ $\sqrt{٣}$ جـ د - ٢٢٥ = صفر

$\therefore$ جـ د = $\frac{٢٢٥}{٥\sqrt{٣}}$ = $\frac{٤٥}{\sqrt{٣}}$ = ١٥ $\sqrt{٣}$ سم

أى أن نقطة د تبعد عن نقطة جـ مسافة ١٥ $\sqrt{٣}$ سم

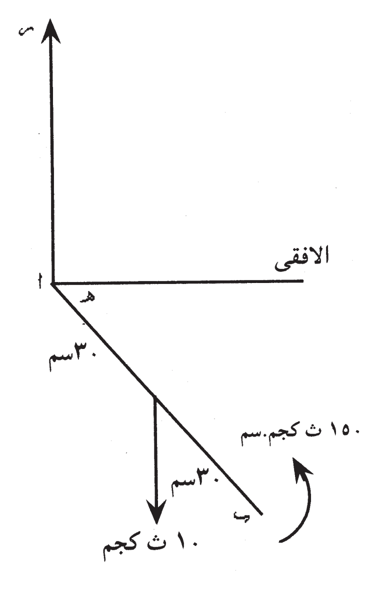
مثال (٣) :

$\overline{أ ب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٠ ثقل كجم يؤثر فى منتصفه ويتحرك فى مستوى رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه أ ، أثر على القضيب ازدواج فى مستوى رأسى . القياس الجبرى لعزمه ١٥٠ ث كجم . سم . برهن على أن رد فعل المفصل عند أ يساوى وزن القضيب وأوجد ميل القضيب على الأفقى فى وضع التوازن .

الحـــل

بما أن القوى المؤثرة على القضيب هى وزنه ورد الفعل عند المفصل أ بالإضافة إلى الازدواج فلكى يتزن الجسم يجب أن يؤثر عليه ازدواج عزمه يساوى فى المقدار ويضاد فى الاتجاه الازدواج الأول وبالتالى فإن الوزن ورد الفعل يكوّنان ازدواجًا .

وعلى ذلك فإن رد الفعل عند أ يكون رأسيًا إلى أعلى ومساويًا فى المقدار لوزن القضيب أى أن مقدار رد الفعل يساوى ١٠ ث كجم .



شكل (٨٢)

القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من قوتى الوزن ورد الفعل :

ج$_1$ = - ١٠ × ٣٠ حتا هـ = - ٣٠٠ حتا هـ ث كجم . سم

القياس الجبرى لعزم الازدواج المعطى :

$ج_٢$ = ١٥٠ ث كجم . سم

عند التوازن يكون $ج_١ + ج_٢$ = صفر

∴ ١٥٠ - ٣٠٠ حتا هـ = صفر

∴ حتا هـ = $\frac{١}{٢}$

∴ حتا ق ($\hat{هـ}$) = ± ٦٠°

أى أن هناك وضعين للتوازن ، يميل فيهما القضيب على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° إما لأعلى أو لأسفل .

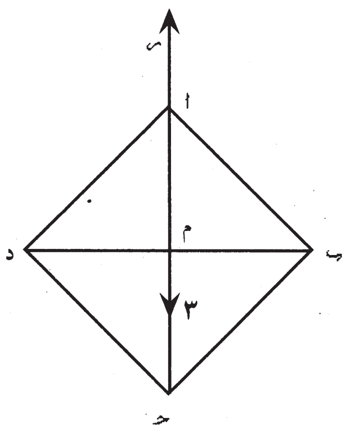
مثال (٤) :

أ ب جـ د صفيحة رقيقة منتظمة وزنها ٣ نيوتن على هيئة مربع طول ضلعه ٥٠سم مثقوبة ثقبًا صغيراً بالقرب من أ ومعلقة من هذا الثقب فى مسمار رفيع بحيث كان مستواها رأسيًا. أوجد الضغط على المسمار إذا أثر على الصفيحة ازدواج عزمه ٧,٥ نيوتن. سم فى مستواها فاثبت أن الضغط على المسمار لا يتغير ثم أوجد ميل القطر $\overline{أ جـ}$ على الرأسى فى وضع التوازن إذا عُلِم أن وزن الصفيحة يؤثر فى نقطة تلاقى قطرى المربع .

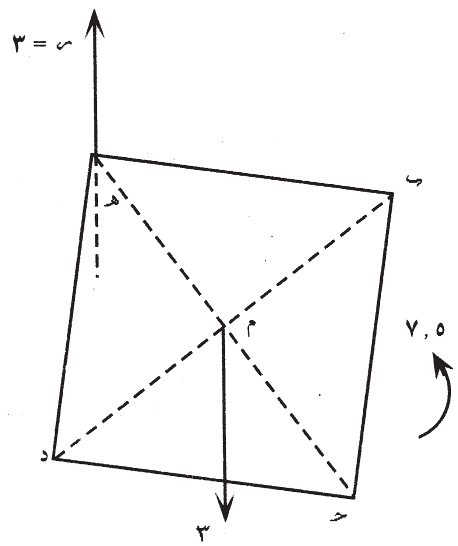
الحـــل

أولاً : فى وضع الإتزان يؤثر على الصفيحة قوتان هما وزنها ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين م ورد الفعل على المسمار عند أ وعلى ذلك فأن رد الفعل عند أ هو قوة رأسية تؤثر إلى أعلى ومقدارها ٣ نيوتن لأن الجسم واقع تحت تأثير قوتين فيجب أن يكونا متساويين فى المقدار وخطا عملهما واحد وفى اتجاهين متضادين .

(كما فى شكل ٨٣)



شكل (٨٣)



شكل (٨٤)

ثانيًا : فى وضع التوازن تكون الصفيحة تحت تأثير قوتين هما وزن الصفيحة ورد الفعل عند أ بالإضافة إلى الازدواج (كما فى شكل ٨٤) .

ولكى يتزن الجسم يجب أن يؤثر عليه ازدواج عزمه يساوى فى المقدار ويضاد فى الاتجاه الازدواج الأول وبالتالى فإن رد الفعل والوزن يكوِّنان ازدواجًا عزمه يضاد عزم الازدواج المؤثر على الصفيحة .

وعلى ذلك فإن رد الفعل عند أ هو قوة رأسية مقدارها يساوى ٣ نيوتن وتؤثر رأسيًا إلى أعلى .

كذلك ٧,٥ − ٣ (أ م حا هـ) = صفر

$\because$ أ م = ٢٥ $\sqrt{٢}$ سم

٧,٥ = ٣ × ٢٥ $\sqrt{٢}$ حا هـ

حا هـ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢٠}$ = $\frac{١,٤١٤}{٢٠}$ = ٠,٠٧٠٧ ..

$\therefore$ هـ = ٤° ٣′ ١٥″

تكافؤ ازدواجين :

تعريف :

يتكافأ ازدواجان مستويان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما .

البرهان :

$\because$ $\overleftarrow{ج_١}$ = ج$_١$ $\overleftarrow{مـ}$ ، $\overleftarrow{ج_٢}$ = ج$_٢$ $\overleftarrow{مـ}$

$\therefore$ شرط التكافؤ هو ج$_١$ $\overleftarrow{مـ}$ = ج$_٢$ $\overleftarrow{مـ}$

$\boxed{\therefore \; ج_١ = ج_٢}$

ملاحظة : الازدواج لا يكافىء إلا إزدواج .

مثال (٥) :

$\overline{\text{أ ب}}$ قضيب مهمل الوزن طوله ١,٥ متر تؤثر عند نقطتى تثليثه قوتان مقدار كل منهما ٢٠٠ نيوتن فى اتجاهين متضادين وعموديًا على القضيب . رفعت القوتان وأثرت بدلاً منهما قوتان أخريان مقدار كل منهما ١٢٠ نيوتن عند طرفى القضيب بحيث تكونان ازدواجًا يكافىء الازدواج الأول . **فما هو ميل خط عمل كل من القوتين الجديدتين على القضيب .**

الحل

لنفرض أن القوتين ٢٠٠ ، ٢٠٠ نيوتن تؤثران فى الاتجاهين الموضحين على شكل (٨٥) القياس الجبرى لعزم الازدواج الناشى .

ج$_{١}$ = − ٢٠٠ × ٠,٥ = − ١٠٠ نيوتن . متر

والاشارة هنا توضح أن هذا الازدواج يعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة .

بما أن القياس الجبرى للازدواج الجديد يساوى ج$_{١}$ فإن القوتين ١٢٠ ، ١٢٠ نيوتن تعملان في الاتجاهين الموضحين على الشكل .

لحساب ج$_{٢}$ ، نرسم عموداً من ب على خط عمل القوة المؤثرة عند أ فيقطعه فى نقطة جـ مثلاً، وليكن هـ قياس زاوية ميل كل من القوتين الجديدتين على القضيب .

∴ ج$_{٢}$ = − ١٢٠ × (أ ب × حا هـ)

= − ١٢٠ × ١,٥ × حا هـ

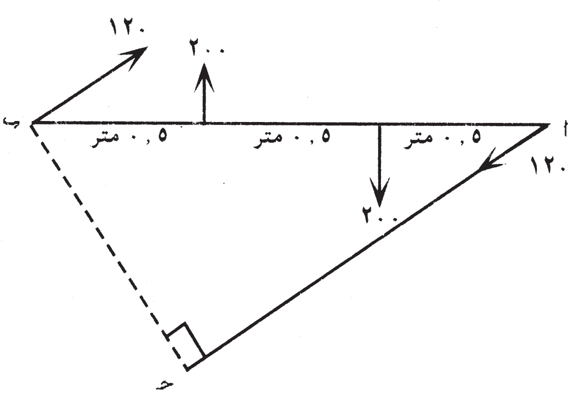
= − ١٨٠ حا هـ

∵ ج$_{١}$ = ج$_{٢}$ ،

∴ − ١٨٠ حا هـ = − ١٠٠

∴ حا هـ = $\frac{١٠٠}{١٨٠}$ = $\frac{٥}{٩}$

∴ ق (هـ$\hat{}$) = ٣٤°

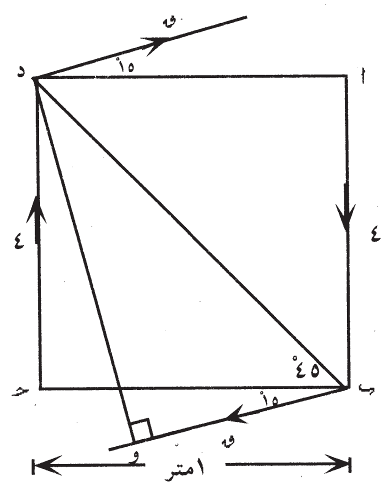


شكل (٨٥)

مثال (٦١) :

أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١ متر تؤثر قوتان معيار كل منهما ٤ ث كجم ، فى أ ب ، جـ د ، كما تؤثر قوتان معيار كل منهما ق مقدراً بواحدات ث كجم عند ب ، د بحيث تصنع الأولى مع د أ والثانية مع ب جـ زاويتين متساويتين فى القياس ، قياس كل منهما ١٥° ، عين قيمة ق حتى يتكافأ الازدواج المكون من القوتين الأوليين والازدواج المكون من القوتين الأخريين .

الحـــل



شكل (٨٦)

من الواضح أن عزمى الازدواج فى اتجاه واحد ، إذ أن كلاً منهما يعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة بالنسبة لمشاهد ينظر إلى الرسم .

معيار عزم الازدواج الأول :

ج = ٤ × ١ = ٤ ث كجم . متر

لحساب معيار عزم الازدواج الثانى، نرسم من د عموداً على خط عمل القوة ق التى تعمل عند ب فيقطعه فى نقطة (و) مثلاً . شكل (٨٦) .

د و = د ب جا (١٥° + ٤٥°) = د ب حا ٦٠°

ولكن د ب = $\sqrt{٢}$ متر

∴ د و = $\sqrt{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ متر

معيار عزم الازدواج الثانى :

ج$_٢$ = ق × د و = $\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ ق ث كجم . متر

شرط تكافؤ الازدواجين هو :

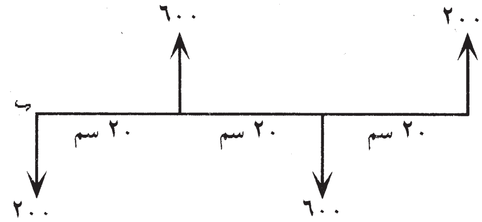
$\frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٢}}$ ق = ٤

∴ ق = $\frac{٤\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} = \frac{٤\sqrt{٦}}{٣}$ ث . كجم .

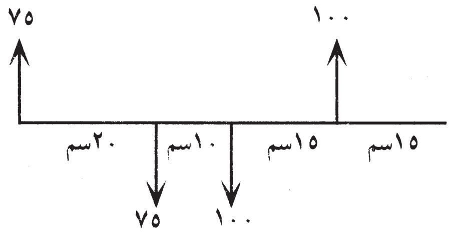
تمـاريــن (٥ - ١)

(١) أ ب قضيب مهمل الوزن وطوله ٦٠سم . أثرت فيه أربع قوى متوازية وعمودية عليه عند النقط وفى الاتجاهات المبينة على أشكال (٨٧ - أ ، ب ، جـ) ، وكانت مقادير القوى المبينة منسوبة كلها إلى نفس واحدات قياس مقدار القوة .

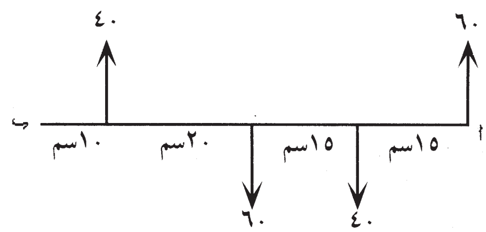
اثبت أن الجسم يتزن فى الحالتين (أ ، ب) ولا يتزن فى الحالة (جـ) .



شكل (٨٧ - أ)



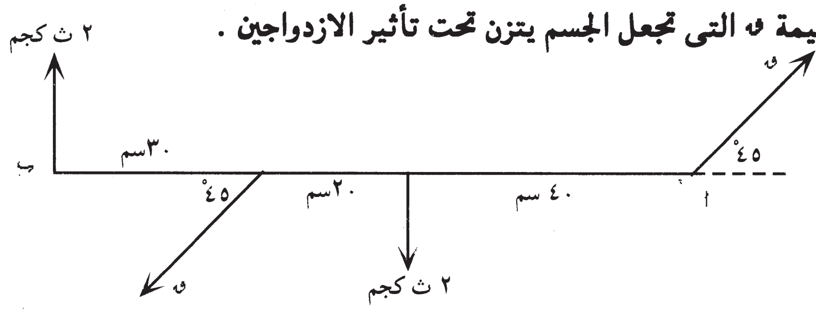
شكل (٨٧ - ب)



شكل (٨٧ - جـ)

(٢) أثر ازدواجان مستويان فى قضيب أ ب مهمل الوزن طوله ٩٠سم ، وكان الازدواج الأول يتكون من قوتين ق ، ق ث كجم . والثانى من قوتين ٢ ، ٢ ث كجم وتؤثر عند النقط وفي الاتجاهات الموضحة على شكل (٨٨)

عين قيمة ق التى تجعل الجسم يتزن تحت تأثير الازدواجين .



شكل (٨٨)

(٣) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٤٠سم ، ب جـ = ٣٠سم أثرت قوتان كل منهما ٢٠٠ نيوتن فى أ ب ، جـ د وقوتان أخريان مقدار كل منهما ق ، ق عند أ ، جـ وتوازيان ب د . **عين قيمة ق حتى يتكافأ الازدواجان الناتجان .**

(٤) قضيب طوله ٤٠سم ووزنه ٢,٤ ث كجم يؤثر عند منتصفه . يمكن للقضيب الدوران بسهولة فى مستو رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه . أثـر على القضيب ازدواج معيار عـزمـه ٢٤ ث كجم . سم واتجاهه عمودى على المستوى الرأسى الذى يمكن للقضيب الدوران فيه .

عين مقدار واتجاه رد فعل المفصل وزاوية ميل القضيب على الرأسى فى وضع الاتزان .

(٥) أ ب قضيب طوله ٦٠سم ووزنه ١٨ نيوتن يؤثر عند منتصفه . يمكن للقضيب الدوران بسهولة فى مستو رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند النقطة جـ التى تبعد ١٥ سم عن أ فإذا استند القضيب بطرفه ب على نضد أفقى أملس وشد الطرف أ أفقيًا بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساويًا لوزن القضيب، **أوجد الشد فى الحبل ورد فعل المسمار علمًا بأن القضيب يتزن فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° .**

(٦) أ ب جـ د صفيحة رقيقة على هيئة مربع طول ضلعه ٥٠سم ووزنها ٣٠٠ ث جم ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين . ثقبت الصفيحة ثقبًا صغيراً بالقرب من أ وعلقت من هذا الثقب فى مسمار أفقى رفيع بحيث اتزنت فى مستو رأسى . أوجد الضغط على المسمار. وإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ٧٥٠٠ ث جم . سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة، **اثبت أن الضغط على المسمار لا يتغير ثم أوجد ميل القطر أ جـ على الرأسى فى وضع الاتزان .**

(٧) أ ب جـ د صفيحة رقيقة على هيئة مربع طول ضلعه ٢٠سم ووزنها ١٥٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين . عُلقت الصفيحة على مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس د فاتزنت فى مستو رأسى . أوجد الضغط على المسمار . وإذا أثر على الصفيحة ازدواج اتجاهه عموديًا على مستويها فاتزنت فى وضع فيه $\overline{\text{أ د}}$ أفقى، **أوجد معيار عزم الازدواج .**

(٨) أ ب جـ د صفيحة رقيقة على هيئة مستطيل فيه أ ب = ١٨سم ، ب جـ = ٢٤ سم ووزنها ٢٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين .علقت الصفيحة فى مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس د بحيث كان مستواها رأسيًا . فإذا أثر على الصفيحة ازدواج يساوى معيار عزمه ١٥٠ نيوتن . سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة **فأوجد زاوية ميل $\overline{\text{د ب}}$ على الرأسى فى وضع الاتزان.**

(٩) أ ب جـ صفيحة رقيقة على هيئة مثلث قائم الزاوية فى ب ، فيه أ ب = ١٢سم ، ب جـ = ١٥سم ووزنها ٦ نيوتن ويؤثر فى نقطة تلاقى متوسطات المثلث . عُلقت الصفيحة فى مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسيًا . فإذا أثر على الصفيحة ازدواج اتجاهه عمودى على مستويها بحيث اتزنت فى وضع كان فيه $\overline{\text{أ ب}}$ رأسيًا. **أوجد معيار عزم الازدواج .**

(١٠) أ ب جـ صفيحة على هيئة مثلث متساوى الأضلاع ووزنها ٥٠ ث جم ويؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث . عُلِقت الصفيحة فى مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسيًا . أثر على الصفيحة ازدواج يساوى معيار عزمه ٢٥٠ ث جم . سم واتجاهه عمودى على مستويها فاتزنت . **أوجد ميل $\overline{\text{أ ب}}$ على الأفقى إذا عُلِم أن ارتفاع المثلث يساوى ١٥سم .**

مجموع ازدواجين مستويين :

نعتبر ازدواجين مستويين ، الأول يتكون من القوتين $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $-\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ وعزمه $\overleftarrow{\text{ج}}_{١}$ ، والثانى يتكون من القوتين $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ ، $-\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ وعزمه $\overleftarrow{\text{ج}}_{٢}$ وتقع القوى الأربع $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $-\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ ، $-\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ فى مستو واحد .

نحصل القوتين $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ ولتكن محصلتهما $\overleftarrow{\text{ح}}$:

$$\therefore \overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}}_{١} + \overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$$

كما نحصل القوتين $-\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ ، $-\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ ولتكن محصلتهما $\overleftarrow{\text{ح}}$

$$\therefore \overleftarrow{\text{ح}} = (-\overleftarrow{\text{ق}}_{١}) + (-\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}) = -\overleftarrow{\text{ق}}_{١} - \overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$$

$$= -(\overleftarrow{\text{ق}}_{١} + \overleftarrow{\text{ق}}_{٢}) = -\overleftarrow{\text{ح}}$$

هكذا أمكن تحصيل القوى الأربع إلي قوتين متوازيتين $\overleftarrow{\text{ح}}$ ، $-\overleftarrow{\text{ح}}$ ، وهما تكوِّنان ازدواجًا يقع فى نفس مستوى الازدواجين السابقين . وإذا كان $\overleftarrow{\text{ج}}$ هو عزم هذا الازدواج فإن :

$\overleftarrow{\text{ج}}$ = (عزم القوة $\overleftarrow{\text{ح}}$ بالنسبة للنقطة و) + (عزم القوة $-\overleftarrow{\text{ح}}$ بالنسبة للنقطة و)

= (عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ بالنسبة للنقطة و + عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ بالنسبة للنقطة و)

= (عزم القوة $-\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ بالنسبة للنقطة و + عزم القوة $-\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ بالنسبة للنقطة و)

= (عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$ بالنسبة للنقطة و + عزم القوة ($-\overleftarrow{\text{ق}}_{١}$) بالنسبة للنقطة و)

= (عزم القوة $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$ بالنسبة للنقطة و + عزم القوة ($-\overleftarrow{\text{ق}}_{٢}$) بالنسبة للنقطة و)

$= \overleftarrow{\text{ج}}_{١} + \overleftarrow{\text{ج}}_{٢}$

استناداً إلى ذلك ، نعطى التعريف الآتى لمجموع ازدواجين مستويين :

تعـريـف :

يعرف مجموع ازدواجين مستويين على أنه الازدواج الذى يساوى عزمه مجموع عزمى هذين الازدواجين .

$$\boxed{\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{ج_{١}} + \overleftarrow{ج_{٢}}}$$

ويسمى مجموع ازدواجين مستويين «الازدواج المحصل» ويقال أيضًا أنه قد تم اختزال الازدواجين إلى ازدواج واحد محصل .

نتيجة :

القياس الجبرى لعزم مجموع ازدواجين مستويين يساوى مجموع القياسين الجبرين لعزميهما .

البرهان :

ليكن $\overleftarrow{ج_{١}} = ج_{١}\,\overleftarrow{م}$ ، $\overleftarrow{ج_{٢}} = ج_{٢}\,\overleftarrow{م}$ عزمى الازدواجين المستويين المراد جمعهما .

عزم المجموع هو : $\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{ج_{١}} + \overleftarrow{ج_{٢}}$

$$= ج_{١}\,\overleftarrow{م} + ج_{٢}\,\overleftarrow{م}$$

$$= (ج_{١} + ج_{٢})\,\overleftarrow{م}$$

مما يعنى أن المتجه $\overleftarrow{ج}$ يوازى كلا من $\overleftarrow{ج_{١}}$ ، $\overleftarrow{ج_{٢}}$ فإذا كان ج هو القياس الجبرى للمتجه $\overleftarrow{ج}$ أى إذا كان :

$$\overleftarrow{ج} = ج\,\overleftarrow{م}$$

فبمقارنة العلاقتين الاخريين نجد :

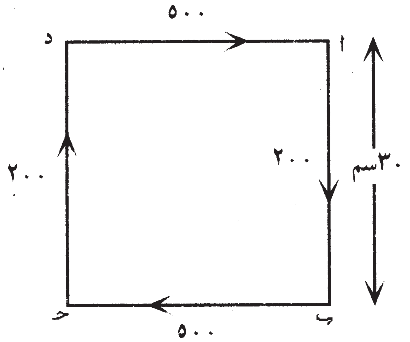
$ج = ج_{١} + ج_{٢}$ وهو المطلوب إثباته

مثال (١) :

أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٣٠سم . أثرت قوتان مقدار كل منهما ٢٠٠ ث جم فى $\overleftarrow{أ\,ب}$ ، $\overleftarrow{جـ\,د}$ وقوتان مقدار كل منهما ٥٠٠ ث جم فى $\overleftarrow{أ\,د}$ ، $\overleftarrow{جـ\,ب}$ أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل.

الحـــل

ليكن $ج_{١}$ ، $ج_{٢}$ القياسين الجبريين لعزمى الازدواج المكون من القوتين ٢٠٠ ، ٢٠٠ ث جم والازدواج المكون من القوتين ٥٠٠ ، ٥٠٠ ث جم على الترتيب ، ج القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل .



شكل (٨٩)

بالرجوع إلى شكل (٨٩) لدينا :

$ج_1 = - ٢٠٠ \times ٣٠ = - ٦٠٠٠$ ث . جم . سم

$ج_2 = ٥٠٠ \times ٣٠ = ١٥٠٠٠$ ث . جم . سم

$\therefore ج = ج_1 + ج_2 = - ٦٠٠٠ + ١٥٠٠٠$

$= ٩٠٠٠$ ث. جم . سم

مثال (٢) :

يقع قضيب $\overline{أ ب}$ مهمل الوزن طوله ٨٠سم تحت تأثير :

* قوتين متضادتين فى الاتجاه ومقدار كل منهما ٢ ث كجم وتعملان عند الطرف أ وعند نقطة منتصف القضيب م ، بحيث يصنع إتجاه القوة عند أ زاوية قياسها ٣٠° مع $\overleftarrow{أ ب}$.

* ازدواج عزمه عمودى على المستوى الذى يجمع خطى عمل القوتين ومعيار عزمه ٨٠ ث كجم. سم .

*** عين الازدواج المحصل فى حالتى أن يكون عزم الازدواج المعطى فى اتجاه عزم الازدواج المكون من القوتين المعطيين أو أن يكون فى عكس اتجاهه .**

الحــل

ليكن $ج_1$ القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين المعطيين ، $ج_2$ القياس الجبرى لعزم الازدواج المعطى (الذى يساوى معيار عزمه ٨٠ ث كجم سم) ، ج القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل ، لتعيين $ج_1$ نرسم من م عموداً على خط عمل القوة التى تعمل عند أ ، فيقطعه فى نقطة جـ مثلاً .

بمراعاة اشارة العزم شكل (٩٠ - أ) نجد :

$ج_1 = -٢ \times$ م جـ

$= -٢ \times$ أ م جا ٣٠°

$= -٢ \times ٤٠ \times \frac{١}{٢}$

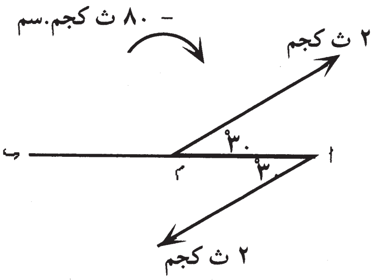
= -٤٠ ث كجم . سم

أولاً : إذا كان عزم الازدواج المعطى فى اتجاه عزم الازدواج المكون من القوتين المعطيين كما فى شكل (٩٠ – أ) فإن اشارة $ج_٢$ تكون مثل اشارة $ج_١$

∴ $ج_٢$ = - ٨٠ ث كجم . سم

∴ ج = $ج_١$ + $ج_٢$

= - ٤٠ – ٨٠ = - ١٢٠ ث . كجم . سم



شكل (٩٠ – أ)

ثانيًا : إذا كان عزم الازدواج المعطى فى عكس اتجاه عزم الازدواج المكون من القوتين المعطيين كما فى شكل (٩٠ – ب) فإن :

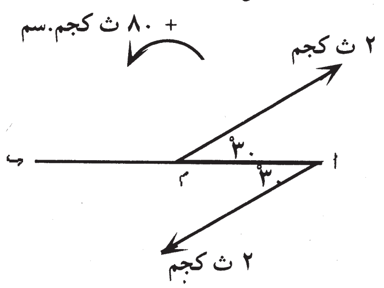
إشارة $ج_٢$ مخالفة لإشارة $ج_١$

∴ $ج_٢$ = ٨٠ ث كجم . سم

∴ ج = $ج_١$ + $ج_٢$

= - ٤٠ + ٨٠

= ٤٠ ث. كجم . سم



شكل (٩٠ – ب)

مجموع أى عدد محدود من الازدواجات المستوية :

يمكن على نفس النهج كما فى حالة جمع ازدواجين مستويين أن نعرف مجموع أى عدد محدود من الازدواجات المستوية .

تعريف :

يعرف مجموع أى عدد محدود من الازدواجات المستوية على أنه الازدواج الذى يساوى عزمه مجموع عزوم هذه الازدواجات .

$\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{ج_{١}} + \overleftarrow{ج_{٢}} + \dots\dots\dots + \overleftarrow{ج_{ن}}$

نتيجة :

القياس الجبرى لعزم مجموع عدة ازدواجات مستوية يساوى مجموع القياسات الجبرية لعزومها .

$ج = ج_{١} + ج_{٢} + \dots\dots\dots + ج_{ن}$

مثال (٣) :

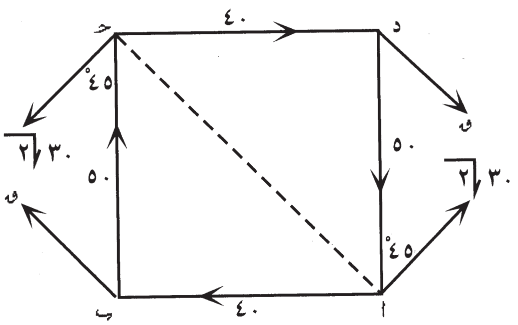
أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٦٠سم أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ٥٠ ، ٤٠ ، ٥٠ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ د}$ ، $\overleftarrow{أ د}$ على الترتيب . كما أثرت فى أ ، جـ قوتان مقدار كل منهما ٣٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن فى الاتجاهين المبينين على شكل (٩١) : **أوجد :**

أولاً : عزم الازدواج الذى يكافىء المجموعة .

ثانيًا : مقدار واتجاه قوتين تعملان عند ب ، د وتوازيان $\overleftrightarrow{أ جـ}$ بحيث يكون المربع فى حالة إتزان .

الحــل

تكوِّن القوتان ٤٠ ، ٤٠ نيوتن أزدواجا ، نفرض أن $ج_{١}$ القياس الجبرى لعزمه :



شكل (٩١)

$ج_{١} = - ٤٠ \times ٦٠ = - ٢٤٠٠$ نيوتن . سم

وتكوِّن القوتان ٥٠ ، ٥٠ نيوتن ازدواجًا ثانيًا

وليكن $ج_{٢}$ القياس الجبرى لعزمه :

$ج_{٢} = ٥٠ \times ٦٠ = ٣٠٠٠$ نيوتن . سم

وأيضًا ، تكون القوتان ٣٠ $\sqrt{٢}$ ، ٣٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن ازدواجًا .

ثالثًا : وليكن $ج_{٣}$ القياس الجبرى لعزمه :

$ج_{٣} = ٣٠\sqrt{٢} \times أ جـ = ٣٠\sqrt{٢} \times ٦٠\sqrt{٢} = ٣٦٠٠$ نيوتن . سم

∴ المجموعة تكافىء ازدواجًا هو مجموع الازدواجات الثلاثة ، ليكن ج القياس الجبرى لمجموع عزوم الازدواجات الثلاثة :

$$ج = ج_{1} + ج_{2} + ج_{3}$$

$$= -٢٤٠٠ + ٣٠٠٠ + ٣٦٠٠ = ٤٢٠٠ \text{ نيوتن . سم}$$

بما أن ج > صفر ، فإن الازدواج المحصل يعمل على الدوران فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة لذلك ، إذا اردنا لهذا الازدواج أن يتوازن مع الازدواج المكون من القوتين $\overrightarrow{ق}$ ، $-\overrightarrow{ق}$ عند ب ، د فإن الازدواج الأخير يجب أن يعمل على الدوران فى اتجاه دوران عقارب الساعة ، أى يجب أن تكون هاتان القوتان موجهتين كما فى شكل (٩١) ، ويكون القياس الجبرى لعزمه سالبًا .

شرط التوازن : $(-ق \times ب د) + ٤٢٠٠ = \text{صفر}$

$$\therefore ق \times ٦٠\sqrt{٢} = ٤٢٠٠$$

$$\therefore ق = \frac{٤٢٠٠}{٦٠\sqrt{٢}} = \frac{٧٠}{\sqrt{٢}} = ٣٥\sqrt{٢} \text{ نيوتن}$$

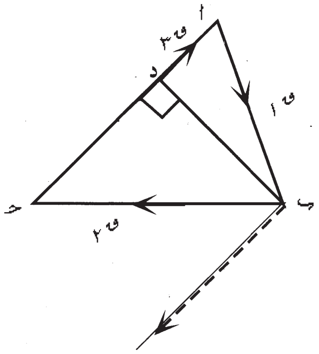
قاعدة :

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تامًا أضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافىء ازدواجًا معيار عزمه يساوى خارج قسمة ضعف مساحة سطح المثلث على الطول الممثل لوحدة القوة (مقياس الرسم) .

البرهان :

تمثل القطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{ب جـ}$ ، $\overrightarrow{جـ أ}$ القوى الثلاث تمثيلاً تامًا ، أى مقدارا واتجاها وخط عمل كما فى شكل (٩٢) .

لنفرض أن مقدار القوة يمثل بمقياس رسم ١ وحدة طول لكل م وحدة مقدار قوة .



شكل (٩٢)

∴ $\overleftarrow{\text{أ ب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ أ}} = \overleftarrow{\cdot}$

∴ $\overleftarrow{\text{ق}_{١}} + \overleftarrow{\text{ق}_{٢}} + \overleftarrow{\text{ق}_{٣}} = \overleftarrow{\cdot}$

∴ $\overleftarrow{\text{ق}_{١}} + \overleftarrow{\text{ق}_{٢}} = - \overleftarrow{\text{ق}_{٣}}$

ومن جهة أخرى ، تمر محصلة القوتين $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٢}}$ المتلاقيتين فى نقطة ب بنقطة التلاقى هذه .

∴ محصلة القوتين $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٢}}$ هى قوة ($- \overleftarrow{\text{ق}_{٣}}$) تعمل عند ب ، لذلك فإن المجموعة الأصلية من القوى $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٢}}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}_{٣}}$ تكافىء القوتين : $\overleftarrow{\text{ق}_{٣}}$ وتعمل عند جـ ، ($- \overleftarrow{\text{ق}_{٣}}$) وتعمل عند ب ، أى أنها تكافىء ازدواجًا .

لتعيين معيار عزم هذا الازدواج ، نرسم عموداً من ب على $\overline{\text{أ جـ}}$ فيقطعه فى نقطة د مثلاً .

معيار عزم الازدواج = $\| \overleftarrow{\text{ق}_{٣}} \|$ × ب د

ولكن $\| \overleftarrow{\text{ق}_{٣}} \|$ = أ جـ × م

∴ معيار عزم الازدواج = أ جـ × م × ب د = (أ جـ × ب د) × م

$$= \frac{\text{ضعف مساحة سطح المثلث أ ب جـ}}{\frac{١}{\text{م}}} = \frac{\text{ضعف مساحة سطح أ ب جـ}}{\text{مقياس رسم مقدار القوة}}$$

وهو المطلوب إثباته

تعميم :

إذا أثرت عدة قوى مستوية فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تاما أضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافىء ازدواجًا يساوى معيار عزمه خارج القسمة لضعف مساحة سطح المضلع على مقياس الرسم المستخدم لتمثيل مقدار القوى .

مثال (٤) :

تمثل ثلاث قوى تمثيلاً تاما بأضلاع مثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب ، مأخوذة فى ترتيب واحد وبمقياس رسم ١ سم لكل ١٠ ث جم .

عين معيار عزم الازدواج الناتج ، علمًا بأن :

أ ب = ٤٠ سم ، ب جـ = ٣٠ سم .

الحــل

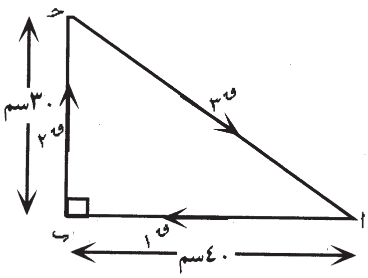
$$\text{معيار عزم الازدواج الناتج} = \frac{\text{ضعف مساحة سطح المثلث}}{\text{مقياس الرسم}}$$

فى حالتنا ، ضعف مساحة سطح المثلث = ٣٠ × ٤٠ = ١٢٠٠ سم^{٢}

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{١ سم}}{\text{١٠ ث جم}}$$

$$\therefore \text{معيار عزم الازدواج} = \frac{\text{١٢٠٠ سم}^{٢}}{\frac{\text{١ سم}}{\text{١٠ ث جم}}}$$

= ١٢٠٠ × ١٠ = ١٢٠٠٠ ث جم . سم



شكل (٩٣)

تمـاريــن (٥ - ٢)

(١) أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٢٠سم أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٥ ث كجم فى ب أ ، ب جـ ، د جـ ، د أ . على الترتيب كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ٤$\sqrt{٢}$ ث كجم عند الرأسين أ . جـ وفى الاتجاهين ب د ، د ب على التـرتيب . **عين عـزم الازدواج المحـصل للمجموعة .**

(٢) أ ب جـ د مربع طول ضلعه ل ، م ∈ أ ب ، هـ ∈ د جـ بحيث م ب = هـ د = $\frac{١}{٣}$ ل أثرت قوتان مقدار كل منهما ١٠٠ نيوتن فى أ د ، جـ ب وأثرت قوتان أخريان مقدار كل منهما ١٥٠ نيوتن فى م جـ ، هـ أ . **عين عزم الازدواج الناتج .**

(٣) أ ب جـ د مستطيل فيه أب = ١٠ سم ، جـ ب = ١٢ سم . نصف أ ب فى س . جـ د فى ص وأثرت قوى مقاديرها ١٨٠ ، ٢٠٠ ، ١٨٠ ، ٢٠٠ ، ٢٦٠ ، ٢٦٠ ث جم فى أ ب ، جـ ب ، جـ د ، أ د ، أ ص ، جـ س على الترتيب . **أوجد عزم الازدواج المحصل .**

(٤) أ ب جـ د هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٥سم . أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ٥٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٣٠ نيوتن فى أ ب ، جـ ب ، جـ د ، د هـ ، و هـ ، و أ على الترتيب . **عين عزم الازدواج المكافىء للمجموعة .**

(٥) أ ب جـ د هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠سم . أثرت القوى ٧ ، ٤ ، ٧ ، ٤ ث جم فى ب أ ، ب جـ ، هـ د ، هـ و على الترتيب . كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ق ث جم فى جـ د ، و أ **عين قيمة ق إذا علم أن المجموعة متوازنة .**

(٦) أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه أ ب = ١٦سم ، ب جـ = ٢٠ سم ، ق (∠ أ ب جـ) = ١٢٠° . أثرت القوى ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٥ ث كجم فى أب ، جـ ب ، جـ د ، أ د على الترتيب . **عين عزم الازدواج المحصل .**

(٧) أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٣٠سم أثرت القوى التى مقاديرها ٤ ، ٥ ، ٤ ، ٥ نيوتن فى أب ، جـ ب ، جـ د ، أ د على الترتيب . كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ٣ $\sqrt{2}$ نيوتن عند أ ، جـ فى الاتجاهين ب د ، د ب على الترتيب . أوجد :

أولاً : الازدواج الذى يكافىء المجموعة .

ثانيًا : مقدار واتجاه قوتين تعملان عند ب ، د وتوازيان أ جـ وتجعلان المجموعة فى حالة توازن .

(٨) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٣٠سم ، ب جـ = ٤٠ سم أثرت القوى التى مقاديرها ١٥ ، ٣٠ ، ١٥ ، ٣٠ نيوتن فى ب أ ، ب جـ ، د جـ ، د أ على الترتيب . **اثبت أن هذه القوى تكافىء ازدواجًا وأوجد عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران فى أ ، جـ عموديا على أ جـ بحيث تتزن المجموعة .**

(٩) أ ب جـ د متوازى أضلاع فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم . ق (∠ أ) = ٦٠° . أثرت القوى التى مقاديرها ٦ ، ٩ ، ٦ ، ٩ ث جم فى أ ب ، جـ ب ، جـ د ، أ د على الترتيب . **أثبت أن المجموعة تكافىء ازدواجا وأوجد عزمه .**

(١٠) مُثِّلت ثلاث قوى تمثيلاً تاما بأضلاع مثلث متساوى الأضلاع أ ب جـ مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ، وبمقياس رسم ١سم لكل ٢ ث جم فإذا كان طول ضلع المثلث يساوى ٣٠سم ، **عين معيار عزم الازدواج الناتج .**

(١١) مُثِّلت ثلاث قوى مقاديرها ٢٠ ، ٣٠ ، ٢٠ نيوتن تمثيلاً تامًا بالقطع المستقيمة الموجهة أب، ب جـ ، جـ أ على الترتيب ، حيث أ ب = ٤٠ سم ، ب جـ = ٦٠سم . عين معيار عزم الازدواج الناتج .

(١٢) أ ب جـ د شبه منحرف فيه أ د // ب جـ ، ق (∠أ ب جـ) = ٩٠° ، أ ب = ٩سم ، ب جـ = ٢٤سم ، أ د = ١٢ سم . أثرت قوى مقاديرها ٤٨ ، ١٨ ، ٢٤، ٣٠ نيوتن فى جـ ب ، ب أ ، أ د ، د جـ على الترتيب . **اثبت أن المجموعة تكافىء إزدواجًا . وأوجد معيار عزمه.**

(١٣) أ ب جـ د شكل رباعى فيه أب = ٨سم ، ب جـ = ٦سم ، جـ د = د أ = ١٣سم ، ق (أ بَ جـ) = ٩٠° أثرت قوى مقاديرها ٤ ، ٣ ، ٦,٥ ، ٦,٥ نيوتن في أ ب ، ب جـ ، جـ د ، د أ على الترتيب .

اثبت أن المجموعة تكافىء ازدواجًا . وأوجد معيار عزمه .

وإذا أثرت فى النقطتين ب ، د قوتان مقدارهما ق ، ق فى اتجاهى جـ أ ، أ جـ على الترتيب. أوجد قيمة ق حتى تتزن المجموعة .

(١٤) أ ب جـ د مستطيل فيه أ ب = ٩سم ، ب جـ = ٢٤ سم ، هـ ، و منتصفا ب جـ ، أ د على الترتيب . أثرت قوى مقاديرها ٢٧ ، ٧٢ ، ٤٥ ، ٣٦ نيوتن فى أ ب ، ب جـ ، جـ و ، و أ على الترتيب .

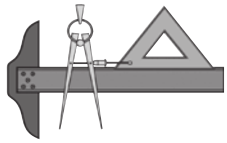
اثبت أن المجموعة تكافىء ازدواجًا . وأوجد معيار عزمه .

ثم أوجد القوتين اللتين تؤثران فى هـ أ ، و جـ حتى يتزن المستطيل .

الجزء الثانى

الديناميكا

الفصل الأول



قوانين نيوتن للحركة

Newton 's Laws of Motion

مقدمة:

تحتوى قوانين نيوتن كما سيأتى ذكره لاحقًا ، على بعض المفاهيم الأساسية فى علم الميكانيكا ، كمفهوم القوة ومفهوم الكتلة ، وقد ظلت هذه المفاهيم تثير الكثير من الجدل بين العلماء لعدم وضوحها بالقدر الكافى .

مما لا شك فيه أننا نستطيع إستشعار تأثير " القوة " من خلال تجربتنا اليومية ، فإذا راقبت حصانًا مثلاً يجر عربة على طريق أفقى ، لو جدت أن العربة تتحرك كلما جذبها الحصان وتتوقف عندما يتوقف الحصان عن الجذب .

الأهداف:

فى نهاية تدريس هذا الفصل ينبغى أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يتعرف مفهوم الكتلة وكمية الحركة ووحدات قياسيهما .
- يتعرف قوانين الحركة لنيوتن .
- يطبق قوانين الحركة لنيوتن فى مواقف بسيطة .

الموضوعات

(١) الكتلة وكمية الحركة ووحدات قياسيهما .

(٢) القانون الأول لنيوتن وتطبيقات .

(٣) القانون الثانى لنيوتن .

(٤) القانون الثالث لنيوتن .

(٥) تطبيقات بسيطة على قوانين الحركة لنيوتن .

قوانين نيوتن للحركة وتطبيقات بسيطة عليها

Newton's laws of motion , and simple applications

نبذة تاريخية :

ظلت دراسة حركة الأجسام منذ عهد بعيد تدور حول موضوعين أساسيين ، هما حركة الأجرام " السماوية " (حركة الكواكب حول الشمس بصفة أساسية) وحركة الأجسام " الأرضية" (أى تلك التى تتحرك على سطح الكرة الأرضية أو بالقرب منها) . وقد اعتقد العلماء والفلاسفة فى بادئ الأمر ، وعلى رأسهم أرسطو ، أن كلا من هذين النوعين من الحركة يختلف اختلافا جذريا عن الآخر فى جوهره ، ولم يتغير هذا الاعتقاد إلا فى النصف الثانى من القرن السابع عشر ، حيث اكتشف العالم الانجليزى اسحق نيوتن (١٦٤٢ م - ١٧٢٧ م) أن هذين النوعين من الحركة هما وجهان لعملة واحدة وأن كليهما يندرج تحت عنوان واحد هو " حركة الأجسام " بوجه عام ، ويعتبر هذا التوحيد فى واقع الأمر أهم انجازات نيوتن .

وإذا كان اسحق نيوتن باكتشافه قانون الجذب العام ، يعتبر المؤسس الرئيسى لعلم الميكانيكا الحديث ، فأن أعمال العلماء الآخرين من أمثال كوبرنيك وكبلر وجاليليو قد مهدت الطريق أمام نيوتن ليحقق ما حققه فى هذا المضمار .

لقد نصت تعاليم العالم البولندى نيقولا كوبرنيك (١٤٧٣ م - ١٥٤٣ م) على أن الأرض كروية وأنها تدور حول محورها وحول الشمس ، فقضى بذلك على النظريات القديمة التى كانت تعتبر الأرض ثابتة ومركزا للكون .

ثم جاء العالم الألمانى يوهان كبلر (١٥٧١ - ١٦٣٠ م) فوضع القواعد الرياضية التى تحكم حركة الكواكب حول الشمس وصحح أفكار كوبرنيك حول شكل مسارات الأجرام السماوية فأوضح أن الكواكب تدور حول الشمس فى مسارات بيضاوية وليست دائرية .

أما العالم الإيطالى جاليليو جاليلى (١٥٦٤ م - ١٦٤٢ م) ، فيعتبر بحق مؤسس علم الحركة . لقد أجرى جاليليو العديد من التجارب على الأجسام الساقطة أو المقذوفة وكذلك على الأجسام المتحركة على سطوح أفقية واكتشف بعض الخصائص الهامة لحركتها . فمن خلال تجاربه

على الأجسام الساقطة اكتشف جاليليو أنه فى حالة إهمال مقاومة الهواء فإن " كل الأجسام الساقطة تتحرك بنفس العجلة المنتظمة " كما أثبت جاليليو أن المقذوف يتحرك فى مسار على هيئة قطع مكافئ ، خلافا لما كان يعتقد حينئذ ، وفى تجاربه على حركة الأجسام على سطوح أفقية ، توصل جاليليو إلى نتيجة هامة تنص على أن " الأجسام التى تتحرك على سطوح أفقية بدون مقاومة تستمر فى حركتها بسرعة منتظمة " ويعتقد أن جاليليو كان قد توصل من خلال تجاربه هذه إلى القانونين الأول والثانى من قوانين نيوتن للحركة ، ولكنه لم يتمكن من صياغتهما بوضوح حينذاك .

ولقد جمع اسحق نيوتن مجمل أبحاثه فى كتاب أسماه " المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية " واسمه الشائع " برنسبيا " (أى " المبادئ " باللغة اللاتينية) وقد ظهرت الطبعة الأولى لهذا الكتاب عام ١٦٨٦ م ، ويعتبر كتاب برنسبيا من أهم الكتب العلمية التى ظهرت فى العصر الحديث ، إن لم يكن أهمها على الاطلاق ، وفيه صاغ نيوتن قوانينه الثلاثة المشهورة .

مما لا شك فيه أننا نستطيع استشعار تأثير القوة، من خلال تجاربنا اليومية فإذا رأيت مثلاً حصاناً يجر عربة على طريق أفقى لوجدت أن العربة تتحرك كلما جذبها الحصان، وتتوقف عندما يتوقف، ولعلك تلاحظ أنك إذا دفعت بيدك قطعة من الخشب موضوعة على نضد أفقى لوجدتها تتحرك تحت تأثير دفعك لها ، فإذا ما أوقفت الدفع سكنت هى على النضد . يوحى هذان المثالان بأن الأجسام تؤثر على بعضها البعض عن طريق التلامس (ونقول أن الأجسام تؤثر على بعضها بقوى)، فالحصان يؤثر على العربة فى المثال الأول، ويدك تؤثر على قطعة الخشب فى المثال الثانى.

ولكن الأمر ليس دائما بهذا الوضوح . فقد تساءل أرسطو عن " المسبب الذى يجعل الحجر المقذوف فى الهواء يتحرك بعد أن يترك يدك " هل نقلت يدك " كمية من القوة " إلى الحجر جعلته يتحرك بعد قذفه؟ أيضا، إذا ما تركت جسما فى الهواء فإنه يسقط نحو الأرض، فما الذى جعله يتحرك بهذه الكيفية؟

لقد ظلت هذه التساؤلات تشحذ فضول واهتمام العلماء لمئات السنين إلى أن أكتشف اسحق نيوتن قانونه الشهير للجذب الذى فسر به حركة الكواكب حول الشمس وحركة الأجسام الساقطة أو المقذوفة . لقد بين لنا هذا القانون لأول مرة أن القوة يمكن أن تحدث تأثيرا على بُعد فالأجسام تجذب بعضها البعض ، حتى وإن لم تكن متلامسة . وعلى سبيل المثال ، فالكرة الارضية تجذب الأجسام بقوة تسمى " قوة الوزن " .

أما مفهوم الكتلة ، فلم يكن أكثر وضوحا من مفهوم القوة لقد عرف الانسان منذ عهد بعيد مفهوم " الوزن" من خلال حاجته لاجراء المبادلات التجارية ، ثم اخترع الميزان للمقارنة بين مختلف الأوزان . وقد ظل مفهوم الكتلة مبهما ومختلطا بمفهوم الوزن لفترة طويلة من الزمن ، حتى عند بعض العلماء البارزين من أمثال جاليليو وديكارت ولايبنتز . وقد بدأ الاختلاف بين المفهومين يتضح حين أكتشف أن وزن الجسم الواحد قد يختلف من مكان لآخر على سطح الكرة الأرضية .

لقد عُرِّفت كتلة الجسم فى بادىء الأمر على أنها " مقدار ما يحتويه هذا الجسم من مادة " فيقول اسحق نيوتن فى احدى كتاباته " قمت بأجراء العديد من التجارب الدقيقة فوجدت فى كل مرة أن مقدار ما يحتويه الجسم من مادة يتناسب مع وزن هذا الجسم " .

هكذا برزت الكتلة كمفهوم مستقل عن الوزن وإن كان هناك تناسبا بين الاثنين ، فالجسم الأكبر وزنا لابد وأن تكون كتلته هى الأكبر . ونلاحظ أن هذا التعريف الاستاتيكى للكتلة لا يسمح بتعيين كتل الأجسام ، ولكن فقط بمقارنة الكتل فيما بينها عن طريق مقارنة أوزانها ، فنقول مثلا إن كتلة هذا الجسم تساوى ثلاثة أمثال كتلة ذاك الجسم لأن وزن الأول يساوى ثلاثة أمثال وزن الثانى .

كما يمكن إعطاء تعريف ديناميكى (أى حركىّ) للكتلة عن طريق دراسة حركة الأجسام تحت تأثير قوة معطاة أو تحت تأثير جسم آخر ، فيقال إن " كتلة الجسم هى مقياس لمدى مقاومة هذا الجسم للقوى التى تعمل على تغيير حالته " أو أنه :

" إذا ترك جسمان ليتحركا تحت تأثير قوى الجذب المتبادل بينهما فأكتسب كل منهما عجلة مساوية لعجلة الآخر فى المقدار ، فإن هذين الجسمين متساويان فى الكتلة " .

ويجب الاعتراف بأن هذه التعريفات بشكلها الحالى تعتبر مبهمة بدرجة أو بأخرى أو غير عملية إذا ما رغبنا فى استخدامها لتعيين كتل الأجسام ، وسنعود إلى ذلك فى موضع لاحق من الكتاب .

الكتلة : نعتبر الفرض الأساسى التالى : Mass

يتميز كل جسم بخاصية ذاتية تسمى الكتلة ، هى كمية قياسية موجبة تتناسب طرديا مع وزن هذا الجسم ، شريطة أن تقاس كل الأوزان فى مكان واحد على سطح الكرة الأرضية .

وسنرمز للكتلة عادة بالرمز ك

ينتج من الفرض الأساسى السابق خاصية هامة للكتلة هى خاصية الجمع :

" كتلة أى جسم تساوى مجموع كتل الأجزاء المكونة له "

يوضح شكل (١٥) هذه الخاصية .

جسم (١) (ك١)	+	جسم (٢) (ك٢)	=	جسم (١) + (٢) (ك١ + ك٢)

شكل (١٥) خاصية الجمع للكتل

وكما هو واضح ، فالفرض الأساسى السابق يعبر عن أن كتلة الجسم هى مقياس لما يحتويه هذا الجسم من مادة .

ولكن ، هل يتيح لنا هذا الفرض تعيين كتل الأجسام ؟ الاجابة بالنفى طبعا ، فكل ما نستطيع القيام به هو مقارنة كتل الأجسام . فيما بينها .

ويلزم لإمكان تعيين الكتل أن نحدد ما هى " وحدة الكتلة " وهذا ما سنوضحه فى البند التالى :

وحدات قياس الكتلة : Units of measure of mass :

رأينا أنه لتعيين كتل الأجسام يلزم تحديد وحدة الكتل ، وهى الكتلة التى يساوى مقدارها الوحدة والتى سنقارن بها باقى الكتل .

لقد اصطلح العلماء على أن تكون وحدة الكتل هى " الكيلو جرام العيارى " (كجم) وهى كتلة جسم أسطوانى الشكل مصنوع من معدنَّى البلاتين والايريديوم ومحفوظ فى متحف المكتب الدولى للموازين والمقاييس بمدينة سيفر بفرنسا .

والكيلو جرام يعادل كتلة لتر واحد من الماء المقطر محفوظ عند درجة ٤ْ وإذا اعتبرنا النظام المترى ، فسنجد أنه يحتوى - بالاضافة إلى الكيلو جرام - على العديد من وحدات قياس الكتلة أهمها الطن والجرام (جم) والدسيجرام (دجم) والسنتيجرام (سجم) والملليجرام (مجم) والميكروجرام (مكجم) وإليك قواعد التحويل لبعض الوحدات الأساسية لقياس الكتلة :

١ طـــن = ١٠٠٠ كيلو جرام

١ جـــرام = $\frac{١}{١٠٠٠}$ كيلو جرام (١٠$^{-٣}$ كجم)

١ ملليجرام = $\frac{١}{١٠٠٠}$ جرام (١٠$^{-٣}$ جم)

من الواضح أن الجرام وأجزاءه تستخدم فى قياس الكتل الصغيرة نسبيا (كما فى صناعة الأدوية مثلا) ، بينما يستخدم الطن فى قياس الكتل الكبيرة نسبيا (عند تعبئة المحاصيل الزراعية أو فى الصناعات الثقيلة مثلا) .

ومن الجدير بالذكر أن كتلة الجسم الواحد قد تتغير من لحظة لأخرى والأمثلة على ذلك كثيرة : فالصاروخ مثلا تتضاءل كتلته نتيجة لخروج الغازات المحترقة منه ، كذلك فأن كتلة قطرة المطر تتزايد أثناء هبوطها نتيجة لتراكم مختلف المعلقات الجوية على سطحها .

مثال (١) :

انطلق صاروخ كتلته ١٥طنا وكان ينفث الوقود بمعدل ثابت يساوى ٢٠٠ كجم فى الثانية .

أوجد كتلة الصاروخ بعد ٣٠ ثانية من لحظة إطلاقه .

الحل

بما أن معدل نفث الوقود ثابت . فإن :

كتلة الوقود الخارج = المعدل × الزمن

= ٢٠٠ × ٣٠ = ٦٠٠٠ كيلو جرام = ٦ طن

∴ كتلة الصاروخ بعد مرور ٣٠ ثانية هى :

ك = ١٥ - ٦ = ٩ طن

مثال (٢) :

تسقط قطرة مطر وكانت كتلتها عند لحظة ما تساوى ٠٫١ جرام . فإذا كان بخار الماء يتراكم على سطحها أثناء هبوطها بمعدل ٢ ملليجرام فى الثانية ، أوجد كتلة القطرة بعد مرور دقيقة واحدة من هذه اللحظة .

الحل

الكتلة المكتسبة = المعدل × الزمن

= ٢ × ٦٠ = ١٢٠ ملليجرام

= ٠٫١٢ جرام

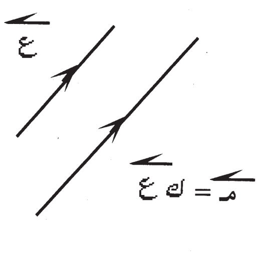
∴ الكتلة النهائية = ٠٫١ + ٠٫١٢ = ٠٫٢٢ جرام

كمية الحركة : Momentum

تقترن كتلة الجسيم المتحرك بمتجه سرعته .

فى خاصية هامة من خصائص الحركة تسمى كمية الحركة

وكان العالم الايطالى الشهير جاليليو هو أول من لاحظ



(شكل ١٦)

أهمية حاصل ضرب وزن الجسيم فى سرعته عند دراسة الحركة ولكن يبدو أن العالم الفرنسى " ديكارت " كان أول من استخدم تعبير " كمية الحركة " وعرفه على أنه حاصل ضرب الكتلة فى السرعة . وقد استقر هذا التعريف الأخير وظهرت أهميته القصوى من خلال أعمال نيوتن وهيوجنز .

تعريف :

يعرف متجه كمية الحركة للجسيم ، وسنرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{م}}$ ، على أنه حاصل ضرب كتلة الجسيم فى متجه سرعته شكل (١٦)

$$\boxed{\overleftarrow{\text{م}} = \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ع}}} \qquad (١)$$

يتضح من هذا التعريف أن كمية حركة الجسيم عند لحظة ما هى متجه له نفس اتجاه السرعة اللحظية للجسيم عند نفس اللحظة . ويتغير متجه كمية حركة الجسيم من لحظة لأخرى مقدارا واتجاها تبعا لتغير متجه السرعة اللحظية .

ويمكن ملاحظة تأثير كمية الحركة فى كثير من الظواهر المحيطة بنا ، فمثلا إذا وضعت على كف يدك حبة رمل فإنك لن تكاد تشعر بوجودها نظرا لصغر كتلتها . ومع ذلك ، فيمكن لهذا الجسيم ذى الكتلة المتواضعة أن يخدش زجاج سيارة تتحرك مسرعة فى جو تجتاحه عاصفة رملية . ويرجع السبب فى ذلك إلى أن حبة الرمل قد اكتسبت كمية حركة بالنسبة للسيارة (تساوى حاصل ضرب كتلتها فى سرعتها بالنسبة للسيارة) وأن مقدار متجه كمية حركتها أصبح كبيرا جدا بدرجة ما نتيجة كبر مقدار متجه السرعة النسبية .

أيضا ، إذا ألقيت حجراً كبيرا على حائط صلد فإنه لن ينفذ من الحائط ، بينما لو أطلقت على نفس الحائط رصاصة من بندقية ، فإنها ستغوص فيه لمسافة ما ، والفارق هنا يتمثل فى أن مقدار سرعة الرصاصة أكبر بكثير من مقدار سرعة الحجر ، علما بأن كتلة الأخير قد تكون أكبر من كتلة الرصاصة .

فى حالة الحركة المستقيمة ، يكون كل من المتجهين $\overleftarrow{\text{م}}$ ، $\overleftarrow{\text{ع}}$ موازيا للخط المستقيم الذى

تحدث عليه الحركة وبالتالى يمكن التعبير عن كل منهما بدلالة قياسه الجبرى منسوبا إلى متجه وحدة مواز لهذا الخط المستقيم :

$$\overleftarrow{\text{مـ}} = \text{مـ}\ \overleftarrow{\text{ى}} \ ، \ \overleftarrow{\text{ع}} = \text{ع}\ \overleftarrow{\text{ى}}$$

وبالتعويض فى (١) وحذف $\overleftarrow{\text{ى}}$ من الطرفين نجد

$$\boxed{\text{مـ} = \text{ك}\ \text{ع}} \qquad (٢)$$

أى أن " القياس الجبرى لمتجه كمية الحركة يساوى حاصل ضرب الكتلة فى القياس الجبرى لمتجه السرعة " .

وحدات قياس مقدار كمية الحركة :

وكما أن مقدار متجه السرعة يقاس بوحدات مقدار السرعة ، فإن مقدار متجه كمية الحركة يقاس بوحدات مقدار كمية الحركة :

وحدة قياس مقدار كمية الحركة = وحدة قياس الكتلة × وحدة قياس مقدار السرعة .

فمثلا ، يمكن قياس مقدار كمية الحركة بوحدة :

$$\text{جرام} \times \frac{\text{سنتيمتر}}{\text{ثانية}} \qquad (\text{جم . سم / ث})$$

أو بوحدة :

$$\text{كيلو جرام} \times \frac{\text{كيلو متر}}{\text{ساعة}} \qquad (\text{كجم . كم / س})$$

ملاحظة :

فى بعض الأحيان ، وعندما نكون غير معنيين بالاتجاه سنستخدم التعبير المختصر " كمية الحركة " للدلالة على " مقدار كمية الحركة "

مثال (٣) :

أوجد كمية حركة سيارة كتلتها ١,٥ طن تتحرك بسرعة ٨٠ كم / س

الحل

كمية الحركة = الكتلة × السرعة

= ١,٥ × ٨٠

= ١٢٠ طن . كم / س

مثال (٤) :

قارن بين كمية حركة قطار كتلته ١٢ طنا يتحرك بسرعة ٠,٣ كم / ساعة وبين كمية حركة قذيفة مدفع كتلتها ٢,٥ كجم تتحرك بسرعة ٤٠٠ متر / ث

الحل

كمية حركة القطار = ١٢ × ٠,٣ طن . كم / س

= ٣,٦ طن . كم / س

= ٣,٦ × $١٠^{٦}$ × $\frac{١٠^{٥}}{٣٦٠٠}$ جم . سم / ث

= $١٠^{٨}$ جم . سم / ث

كمية حركة قذيفة المدفع = ٢,٥ × ٤٠٠ كجم . متر / ث

= $١٠^{٣}$ كجم . متر / ث

= $١٠^{٣}$ × $١٠^{٣}$ × $١٠^{٢}$ جم . سم / ث

= $١٠^{٨}$ جم . سم / ث

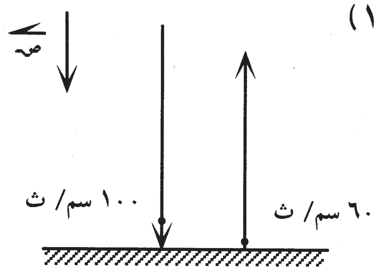
أى أن كميتى الحركة متساويتان .

مثال (٥) :

تركت كرة مصنوعة من المطاط كتلتها ٤٠٠ جم لتسقط على أرض أفقية فاصطدمت بها عندما كانت سرعتها ١٠٠ سم / ث ثم ارتدت من الأرض بسرعة ٦٠ سم / ث . أوجد مقدار التغير فى كمية حركة الكرة نتيجة للتصادم .

الحل

نعتبر متجه وحدة $\overleftarrow{\text{ص}}$ موجها رأسيا إلى أسفل شكل (١٧)



(شكل ١٧)

متجه سرعة الكرة قبل التصادم مباشرة (اتجاه متجه السرعة هو نفسه اتجاه $\overleftarrow{\text{ص}}$)

$$\overleftarrow{\text{ع}}_{1} = 100\ \overleftarrow{\text{ص}}$$

متجه كمية حركة الكرة قبل التصادم مباشرة :

$$\overleftarrow{\text{م}}_{1} = \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ع}}_{1} = 400 \times 100\ \overleftarrow{\text{ص}} = 40000\ \overleftarrow{\text{ص}}$$

متجه سرعة الكرة بعد التصادم مباشرة (اتجاه متجه السرعة مضاد لاتجاه $\overleftarrow{\text{ص}}$) :

$$\overleftarrow{\text{ع}}_{2} = -60\ \overleftarrow{\text{ص}}$$

متجه كمية حركة الكرة بعد التصادم مباشرة :

$$\overleftarrow{\text{م}}_{2} = \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ع}}_{2} = 400 \times (-60\ \overleftarrow{\text{ص}}) = -24000\ \overleftarrow{\text{ص}}$$

التغير فى كمية حركة الكرة نتيجة للتصادم :

$$\overleftarrow{\text{م}}_{2} - \overleftarrow{\text{م}}_{1} = (-24000\ \overleftarrow{\text{ص}}) - (40000\ \overleftarrow{\text{ص}})$$

$$= -64000\ \overleftarrow{\text{ص}}$$

أما مقدار التغير فى كمية الحركة فهو :

$$\|\overleftarrow{\text{م}}_{2} - \overleftarrow{\text{م}}_{1}\| = 64000 \text{ جم . سم / ث}$$

تمرين : على الطالب أن يقوم بحل هذه المسألة فى حالة أن يكون $\overleftarrow{\text{ص}}$ موجها لأعلى .

مثال (٦) :

تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ١٠٠ كم / س وهناك عاصفة رملية تهب فى الاتجاه المضاد لحركة السيارة بسرعة ٨٠ كم / س

فإذا علم أن كتلة حبة الرمل تساوى ١٠ ملليجرام ، أوجد كمية حركة حبة الرمل بالنسبة للسيارة ، مقدرا بوحدات جم . سم / ث

الحل

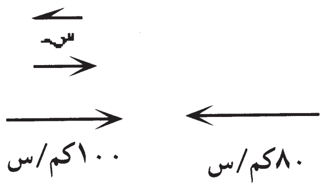
نعتبر متجه وحدة $\overleftarrow{\text{س}}$ فى اتجاه حركة السيارة شكل (١٨)

متجه سرعة السيارة :

$\overleftarrow{\text{ع}}_{١} = ١٠٠ \; \overleftarrow{\text{س}}$

متجه سرعة حبل الرمل

$\overleftarrow{\text{ع}}_{٢} = - ٨٠ \; \overleftarrow{\text{س}}$



(شكل ١٨)

بما أن المطلوب هو كمية حركة حبة الرمل بالنسبة للسيارة ، فيجب حساب سرعة حبة الرمل بالنسبة للسيارة . لتكن $\overleftarrow{\text{ع}}$ هذه السرعة ، من قواعد السرعة النسبية نجد :

$\overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{\text{ع}}_{٢} - \overleftarrow{\text{ع}}_{١} = (- ٨٠ \; \overleftarrow{\text{س}}) - (١٠٠ \; \overleftarrow{\text{س}})$

$= - ١٨٠ \; \overleftarrow{\text{س}}$

مما يعنى أن المشاهد الموجود داخل السيارة يرى حبة الرمل وكأنها تتجه نحو السيارة بسرعة ١٨٠ كم /س

كمية حركة حبة الرمل بالنسبة للسيارة :

$\overleftarrow{\text{م}} = \text{ك} \; \overleftarrow{\text{ع}} = ١٠ \times (- ١٨٠ \; \overleftarrow{\text{س}}) = - ١٨٠٠ \; \overleftarrow{\text{س}}$

$\therefore \; \| \overleftarrow{\text{م}} \| = ١٨٠٠$ مجم . كم / س

$= ١٨٠٠ \times ١٠^{-٣} \times \frac{١٠^{٥}}{٣٦٠٠}$ جم . سم / ث

$= ٠.٥ \times ١٠^{٢}$ جم . سم / ث

$= ٥٠$ جم . سم / ث

مثال (٧) :

ترك جسيم ليسقط من قمة برج ، احسب كمية حركته عند أى لحظة زمنية واثبت أن معدل تغيره يكون ثابتا .

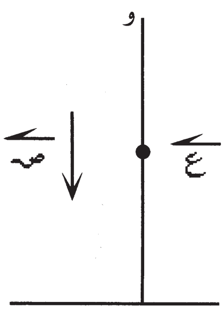
الحل

من قوانين الحركة تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية ينتج أن متجه سرعة الجسيم عند اللحظة الزمنية ن هو

$$\overleftarrow{\text{ع}} = \overleftarrow{\text{ع}}_{\cdot} + \text{ن د}\ \overleftarrow{\text{ص}}$$

$$= \overleftarrow{\cdot} + \text{ن د}\ \overleftarrow{\text{ص}}$$

$$= \text{ن د}\ \overleftarrow{\text{ص}}$$



(شكل ١٩)

حيث د مقدار عجلة الجاذبية الأرضية الثابتة ،

$\overleftarrow{\text{ص}}$ متجه وحدة موضح على شكل (١٩)

$$\therefore \overleftarrow{\text{م}} = \text{ك}\ \overleftarrow{\text{ع}} = \text{ن ك د}\ \overleftarrow{\text{ص}}$$

معدل تغير $\overleftarrow{\text{م}}$ بالنسبة للزمن :

$$\frac{\text{د}\ \overleftarrow{\text{م}}}{\text{د ن}} = \text{ك د}\ \overleftarrow{\text{ص}}$$

وهو متجه ثابت

تمارين (١ - ١)

(١) ينطلق صاروخ كتلته ٣ طن وكان ينفث الوقود بمعدل ثابت يساوى ١٠٠ كجم فى الثانية . فـإذا كـانت كتلة الصـاروخ الفـارغ من الوقـود هى ١ طن ، أوجد متى يفـرغ الوقـود من الصاروخ .

(٢) تتحرك كرة كتلتها ١ كجم فى هواء محمل بالغبار وكان معدل تراكم الغبار على سطحها يساوى ٢٠ جم / دقيقة . بعد كم من الوقت تصبح كتلة الكرة المحملة بالغبار ١.٥ كجم؟

(٣) أوجد كمية حركة سيارة كتلتها ١٨٠٠ كجم وتتحرك بسرعة ١٠٠ كم / س مقدرا إجابتك بوحدات جم . متر / ث

(٤) قذفت كرة من المطاط كتلتها ٤٠ جم على أرض أفقية ملساء فاصطدمت بحاجز بسرعة ٨٠ سم / ث ثم ارتدت منه فى الاتجاه المضاد بسرعة ٤٠ سم / ث أوجد مقدار التغير فى كمية حركتها نتيجة للتصادم .

(٥) تركت كرة من المطاط كتلتها ١٠٠ جم لتسقط على أرض أفقية فاصطدمت بها بسرعة ٤٠٠ سم /ث ثم ارتدت إلى ارتفاع ٥٠ سم قبل أن تسكن لحظيا . عين مقدار التغير في كمية حركتها قبل وبعد التصادم مباشرة .

(٦) تركت كرة من المطاط كتلتها ٥٠ جم لتسقط من ارتفاع ٤.٩ متر على أرض أفقية فاصطدمت بها وارتدت إلى ارتفاع ٢.٥ متر قبل أن تسكن لحظيا . احسب مقدار التغير فى كمية حركتها قبل وبعد التصادم مباشرة .

(٧) تركت كرة من المطاط كتلتها ١٠٠ جم لتسقط من ارتفاع ٤٠ سم على أرض أفقية . فإذا علم أن الكرة ترتد بعد كل صدمة إلى ربع الارتفاع الذى تسقط منه ، أوجد مقدار التغير فى كمية حركتها قبل وبعد الصدمة الثانية مباشرة مقدرا بوحدات جم . سم / ث

(٨) أطلقت رصاصة كتلتها ٥٠ جم بسرعة ٨١٠ متر / ث نحو جسم خشبى ساكن كتلته ٤ كجم فاستقرت فيه وتحركت المجموعة بعد ذلك بسرعة ما أوجد هذه السرعة ، علما بأن كمية حركة المجموعة لم تتغير نتيجة للتصادم .

(٩) أطلق مدفع مضاد للدبابات قذيفة كتلتها ١ كجم بسرعة ٣٠٠ متر / ث فى اتجاه دبابة تتحرك نحو المدفع بسرعة ٦٠ كم / س فأصابتها .

أوجد مقدار كمية الحركة المطلقة للقذيفة وكذلك مقدار كمية حزكتها بالنسبة للدبابة وقارن بينهما .

(١٠) قذف جسيم رأسيا إلى أعلى بسرعة ع : اكتب القانون الذى يعطى سرعته بدلالة الزمن ثم استنتج منه أن معدل تغير كمية حركته بالنسبة للزمن هو متجه ثابت .

قوانين نيوتن Newton's Laws

القانون الأول لنيوتن Newton's First Law :

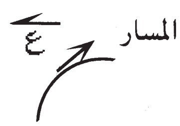
يظل كل جسم على حالته من سكون أو حركة منتظمة
ما لم يؤثر عليه مؤثر خارجى يغير من حالته

نذكر الطالب بأن الحركة المنتظمة هى حركة بسرعة ثابتة المقدار والاتجاه.

مناقشة القانون :

١- يفترض القانون وجود مؤثر يسمى " القوة " إذا ما أثر على جسم ساكن أو متحرك حركة منتظمة ، أخرجه عن حالته هذه .

فأذا رأيت جسما ساكنا يبدأ فى التحرك فلابد وأنه قد وقع تحت تأثير قوة . وإذا تحرك جسم على مسار منحنى كالموضح فى شكل (٢٠) فهو واقع تحت تأثير قوة . كذلك ، إذا تحرك جسم على خط مستقيم بسرعة متغير فى المقدار أو فى الاتجاه أو فى كليهما ، فيمكن أن نستنتج أن هناك قوة تؤثر عليه .



(شكل ٢٠)

٢ - يقصد بتعبير " القوة " فى صياغة القانون محصلة كل القوى المؤثرة على الجسم .

٣ - يضع القانون حالتى السكون والحركة المنتظمة فى وضع متكافئ ، وتمثل كلتاهما " الحالة الطبيعية " للجسم ، عندما تكون محصلة القوى المؤثر عليه مساوية للصفر .

٤ - يبين القانون أن الجسم الساكن أو المتحرك حركة منتظمة (أى عندما يكون فى حالته الطبيعية) لا يمكنه تغيير حالته هذه تلقائيا ، بل لابد وأن تؤثر عليه قوة فتخرجه من هذه الحالة . ولهذا السبب سمى القانون الأول لنيوتن " قانون القصور الذاتى " .

٥ - يتفق القانون الأول مع النتائج التى استخلصها جاليليو من تجاربه على الكرات المتحركة على سطوح أفقية ، فقد لاحظ أنه كلما صغرت مقاومة السطح للحركة ، اقترب الجسم من حالة الحركة المنتظمة .

ومن المفيد أن نعلم أن جاليليو كان قد صاغ قانونا يشبه القانون الأول لنيوتن ينص على أنه " إذا ترك جسم ليتحرك على سطح الأرض بدون أن تؤثر عليه أيه مقاومة ، فأنه يتحرك بسرعة ثابتة على دائرة كبرى للكرة الأرضية " .

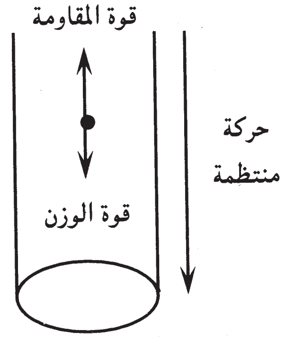
٦ - على الرغم من الصياغة البسيطة للقانون الأول لنيوتن ، فأن هذا القانون يحتوى على مضمون أعمق مما توحى به صياغته .

لمزيد من التوضيح ، نذكر الطالب بأن مفهوم الحركة هو مفهوم نسبى ، وما هو متحرك بالنسبة لمشاهد ما قد يبدو ساكنا بالنسبة للآخر .

وعلى ذلك فأننا نتوقع وجود حدود صلاحية معينة للقانون الأول لنيوتن ، بمعنى أن هذا القانون لن يكون صحيحا لكافة المشاهدين الذين يدرسون حركة الأجسام ، بل لبعضهم فقط ، وتدل خبرتنا على أن المشاهد الذى يرصد الحركة من موقع على سطح الأرض يستطيع استخدام القانون الأول لنيوتن والحصول منه على نتائج تتفق مع الواقع ، بشرط أن تكون الحركة التى يرصدها هذا المشاهد محدودة فى الفراغ والزمن بدرجة كافية ، أى ألا يكون الجسم قد قطع مسافات كبيرة وألا يكون قد تحرك لفترة طويلة أكثر من اللازم . أما فى غير هذه الحالات ، فأن تأثير دوران الكرة الأرضية حول نفسها وحول الشمس على قياسات المشاهد يجعل تطبيق القانون الأول لنيوتن محفوفا بالمخاطر وقد يؤدى إلى نتائج خاطئة .

مثال (١) :

إثبات أن السائل يقاوم حركة الأجسام فيه تدل التجربة على أنه إذا تركت كرة معدنية صغيرة لتسقط فى أنبوبة رأسية طويلة مملوءة بالسائل (كالزيت مثلا) ، فأن حركتها تكون متسارعة فى البداية ثم لا تلبث أن تصبح حركة منتظمة (شكل ٢١) .



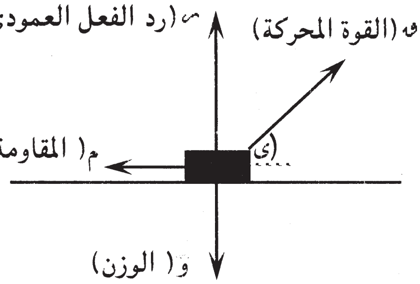
(شكل ٢١)

بتطبيق القانون الأول لنيوتن على الحركة المنتظمة المذكورة ، نستنتج أن محصلة القوى المؤثرة على الكرة يجب أن تنعدم . وبما أن الكرة تهبط تحت تأثير قوة وزنها الموجهة رأسيا لأسفل ، فأننا

نستنتج وجود قوة ثانية تعادل قوة الوزن - أى تكون موجهة رأسيا لأعلى وتساوى فى المقدار وزن الكرة - تؤثر على الكرة . نعلم أن هذه القوة تنشأ عن ملامسة جزئيات السائل لسطح الكرة . وتسمى " قوة مقاومة السائل لحركة الجسم فيه " وتكون القوة مسئولة عن ظاهرة اللزوجة فى السائل .

مثال (٢) :

الحركة المنتظمة لجسم على أرض أفقية :



(شكل ٢٢)

نعتبر جسما يتحرك حركة منتظمة على أرض أفقية تحت تأثير قوة ق تميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها **ى** كما فى شكل (٢٢) .

بما أن الحركة منتظمة ، فإن المجموع الجبرى لمركبات القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاه الحركة يجب أن ينعدم . ولما كانت قوة الوزن رأسية ، فهى لا تدخل فى تحليل القوى فى الاتجاه الأفقى .

نستنتج إذن وجود قوة تؤثر على الجسم وتعمل فى عكس اتجاه الحركة لتعادل المركبة ق جتا ى للقوة ق . تسمى هذه القوة " قوة مقاومة الأرض لحركة الجسم عليها " وهى ناشئة عن ملامسة الجسم للأرض أثناء حركته . فيما يلى سنرمز لمقدار قوة المقاومة بالرمز م .

∴ م = ق جتا ى

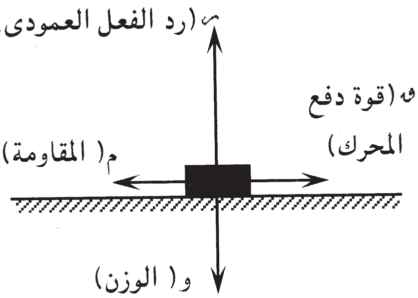
أيضا ، بما أنه لا توجد حركة رأسية للجسم ، فإن المجموع الجبرى لمركبات القوى المؤثرة على الجسم فى اتجاه رأسى تنعدم ، فلابد إذن من وجود قوة تؤثر على الجسم وتعمل رأسيا لأعلى لتعادل قوة الوزن .

تسمى هذه القوة " قوة رد الفعل العمودى للأرض " وهى ناشئة أيضا عن ملامسة الجسم للأرض . سنرمز لمقدار هذه القوة بالرمز ر

∴ ر + ق حا ى = و

مثال (٣) :

الحركة المنتظمة لسيارة (أو قطار) على طريق أفقى :



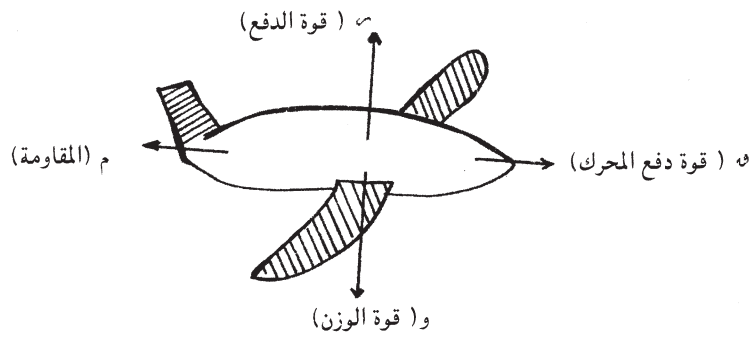
(شكل ٢٣)

فى هذه الحالة ، تكون القوة المحركة هى قوة دفع المحرك ويكون اتجاهها أفقيا كما فى شكل (٢٣) فلو وضعنا ى = صفرْ فى المثال السابق لاستنتجنا مباشرة أن :

م = ق

، ر = و

أما إذا كان الجسم المتحرك حركة منتظمة هو طائرة تطير على ارتفاع ثابت فأن القوة الموجهة رأسيًا لأعلى والمؤثر على الطائرة تكون هى قوة الرفع ، وهى تؤثر بصفة أساسية على أجنحة الطائرة . وتنشأ عن اختلاف سرعة الهواء بالنسبة للطائرة أعلى وأسفل الأجنحة (شكل ٢٤) .



(شكل ٢٤)

مثال (٤) :

تتحرك سيارة كتلتها ٣ أطنان على طريق أفقى مستقيم ، وكانت قوة المقاومة التى يسببها الاحتكاك تتناسب طرديا مع مقدار سرعة السيارة . فأذا كانت أقصى قوة جر للمحرك هى ٥٠٠ ث . كجم وكان مقدار قوة المقاومة ٥٠ ث . كجم عن كل طن من كتلة السيارة عندما كانت سرعتها ٣٠ كم / ساعة . أوجد أقصى سرعة للسيارة على هذا الطريق .

الحل

يتضمن مفهوم " أقصى سرعة " معلومتين هامتين :

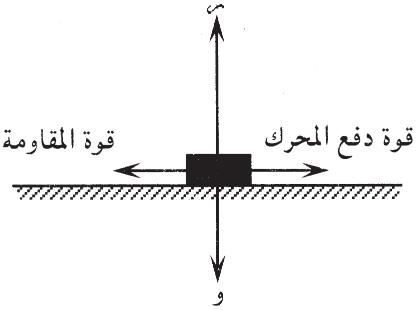
أ) أن السيارة تتحرك بسرعة ثابتة المقدار ، هى أقصى سرعة .

ب) أن المحرك يبذل أقصى قوة له .

تؤثر على السيارة ثلاث قوى .

* قوة دفع المحرك وتعمل أفقيا فى اتجاه الحركة .
* قوة الوزن وتعمل رأسيا لأسفل .
* قوة رد الفعل المحصل . ويمكن تحليلها إلى قوتين ، إحداهما هى قوة المقاومة (الاحتكاك) وتعمل فى عكس اتجاه الحركة ، والثانية هى قوة رد الفعل العمودى وتعمل رأسيا كما فى (شكل ٢٥) .

بما أن الحركة تتم فى الاتجاه الأفقى ، نستنتج أن قوة رد الفعل العمودى تساوى فى المقدار وتضاد فى الاتجاه قوة الوزن أى أن محصلتها تنعدم ، وبالتالى يمكن التغاضى عن هاتين القوتين إذا لم يكن مطلوبا حساب مقدار قوة رد الفعل العمودى .



(شكل ٢٥)

لنفرض أن م مقدار قوة المقاومة ،

ع مقدار السرعة .

∴ م = أ ع　　　(١)

حيث أ ثابت التناسب الذى يمكن تعيينه (عند اللزوم) من معلومية قوة المقاومة عند السرعة ٣٠ كم / س .

عندما كانت السرعة ٣٠ كم / س ، كانت قوة المقاومة الكلية

م = ٥٠ × ٣ = ١٥٠ ث كجم .

بالتعويض فى (١) :

∴ ١٥٠ = أ × ٣٠　　　(٢)

لتكن ع أقصى سرعة للسيارة . عندها تنعدم محصلة القوى المؤثرة على السيارة ، وبالتالى فأن قوة المقاومة تضاد قوة دفع السيارة فى الاتجاه وتساويها فى المقدار . بينما تضاد قوة رد الفعل العمودى قوة الوزن فى الاتجاه وتساويها فى المقدار .

∴ م = ٥٠٠ ث. كجم

بالتعويض بهذه القيمة فى (١) مع أخذ ع = ع$_١$ نجد أن :

٥٠٠ = أ ع$_١$ (٣)

بقسمة (٣) على (٢) نجد أن :

$$\frac{٥٠٠}{١٥٠} = \frac{أ \times ع_١}{أ \times ٣٠}$$

$$\therefore \frac{٥٠٠}{١٥٠} = \frac{ع_١}{٣٠}$$

$$، ع_١ = \frac{٥٠٠ \times ٣٠}{١٥٠} = ١٠٠ \text{ كم / س}$$

مثال (٥) :

يتحرك جسم بتأثير قوانين $\overleftarrow{ق_١} = \overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = -\sqrt{٣}\,\overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها الوحدة الاساسيان . أوجد قوة ثالثة $\overleftarrow{ق_٣}$ بحيث إذا اثرت على الجسم فأنه يتحرك حركة منتظمة وأوجد معيار واتجاه هذه القوة .

الحل

∵ الجسم يتحرك حركة منتظمة

$$\therefore \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} = \overleftarrow{٠}$$

$$\therefore \overleftarrow{ق_٣} = -(\overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢}) = -(\overleftarrow{س} - \sqrt{٣}\,\overleftarrow{ص}) = -\overleftarrow{س} + \sqrt{٣}\,\overleftarrow{ص}$$

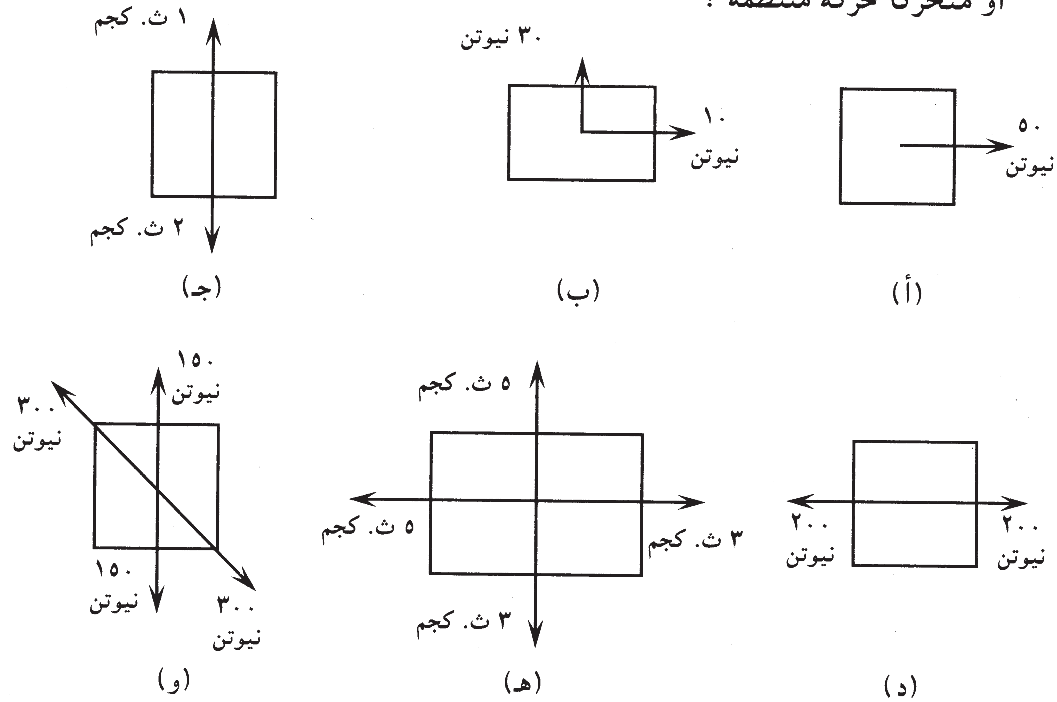
$$\therefore \|\overleftarrow{ق_٣}\| = \sqrt{١ + ٣} = ٢ \text{ وحدة قوة .}$$

ويصنع خط عمل $\overleftarrow{ق_٣}$ مع $\overleftarrow{س}$ زاوية قياسها هـ حيث

طا هـ = $\frac{\sqrt{٣}}{-١} = -\sqrt{٣}$ أى زاوية قياسها ١٢٠°

تمارين (١ - ٢)

(١) يبين شكل (٢٦) القوى المؤثرة على بعض الأجسام .فأى هذه الأجسام يمكن أن يكون ساكنا أو متحركا حركة منتظمة ؟



شكل (٢٦)

(٢) تهبط كرة معدنية صغيرة وزنها ١٥٠ ث . جم رأسيا فى سائل ، وجد أنها تقطع مسافات متساوية فى فترات زمنية متساوية .

فما هو مقدار قوة مقاومة السائل لحركة الكرة ؟

(٣) يهبط مظلى رأسيا بسرعة منتظمة ، فإذا كان الوزن الكلى له والمظلة ٩٥ ث .كجم ، أوجد مقدار قوة مقاومة الهواء للمظلة .

(٤) يجذب حصان كتلة خشبية على أرض أفقية بقوة مقدارها ١٠٠ ث .كجم وتميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا تحركت الكتلة بسرعة منتظمة ، أوجد قوة مقاومة الأرض لحركتها .

(٥) تتحرك سيارة كتلتها ٤ طن على طريق أفقى مستقيم تحت تأثير مقاومة تتناسب طرديا مع مقدار سرعتها ، فإذا كانت المقاومة ٨ ث . كجم لكل طن من كتلة السيارة عندما كانت السرعة ٧٢ كم / س

أوجد أقصى سرعة لها علما بأن أقصى قوة يولدها المحرك هى ٦٠ ث . كجم .

(٦) يتحرك جسم كتلته ك تحت تأثير القوتين .

$\overrightarrow{ق_1} = ٣ ك \, \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٤ ك \, \overrightarrow{ص}$

حيث $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان

عين القوة الاضافية التى لو أثرت على الجسم لجعلته يتحرك حركة منتظمة .

(٧) رجل مربوط إلى مظلة نجاة يهبط هو والمظلة فى اتجاه رأسى إلى أسفل . فإذا علم أن مقاومة الهواء تتناسب طرديا مع مربع مقدار السرعة وأن مقاومة الهواء تساوى $\frac{1}{4}$ وزن الرجل والمظلة عندما تكون السرعة ١٥ كم / س فأوجد سرعة هبوط الرجل والمظلة عندما تصير هذه السرعة منتظمة .

(٨) قطار كتلته ١١٢ طن وقوة قاطرته ٥٦٠٠ ث كجم . فإذا كانت المقاومة لحركة هذا القطار تتناسب طرديًا مع مربع سرعته . وعلم أن المقاومة كانت ٣٢ ث . كجم لكل طن من الكتلة عندما كانت سرعته ٦٠ كم / س . أحسب أقصى سرعة يمكن لهذا القطار أن يسير بها .

(٩) وضع جسم كتلته ١٠ كيلو جرام على مستوى أفقى وربط بحبلين أفقيين قياس الزاوية بينهما °١٢٠ وعندما كانت قوة الشد فى كل من الحبلين ٤٠٠ ث . جرام تحرك الجسم على المستوى حركة منتظمة . أوجد مقدار واتجاه قوة مقاومة المستوى لحركة الجسم .

القانون الثانى لنيوتن
Newton's Second Law

معدل تغير كمية حركة الجسم بالنسبة للزمن

يتناسب مع القوة المحدثة له ويكون فى اتجاهها

والتعبير الرياضى للقانون الثانى :

$$\frac{\text{د}}{\text{د ن}}\left(\text{ك}\ \overleftarrow{\text{ع}}\right) \propto \overleftarrow{\text{ق}}$$

أو

$$\frac{\text{د}}{\text{د ن}}\left(\text{ك}\ \overleftarrow{\text{ع}}\right) = \text{أ}\ \overleftarrow{\text{ق}}$$

حيث أ ثابت التناسب الموجب .

وإذا كانت كتلة الجسم ثابتة أثناء الحركة ، فأنه يمكن كتابة

$$\frac{\text{د}}{\text{د ن}}\left(\text{ك}\ \overleftarrow{\text{ع}}\right) = \text{ك}\ \frac{\text{د}\ \overleftarrow{\text{ع}}}{\text{د ن}} = \text{ك}\ \overleftarrow{\text{جـ}}$$

حيث $\overleftarrow{\text{جـ}}$ عجلة الجسم ، عندئذ يأخذ القانون الثانى لنيوتن الشكل التالى :

$$\text{ك}\ \overleftarrow{\text{جـ}} = \text{أ}\ \overleftarrow{\text{ق}} \qquad (1)$$

ولو كان الثابت أ معلوما ، لأمكن استخدام العلاقة الأخيرة فى تعيين القوة ق بمعلومية العجلة $\overleftarrow{\text{جـ}}$. تبين فيما يلى . كيفية تعيين هذا الثابت .

بما أن كل من متجهى القوة والعجلة فى نفس الاتجاه . فأنه يمكن التعبير عنهما بدلالة متجه وحدة $\overleftarrow{\text{ى}}$ فى اتجاههما عن طريق القياس الجبرى لكل منهما كالآتى :

$$\overleftarrow{\text{جـ}} = \text{جـ}\ \overleftarrow{\text{ى}} \ ،\ \overleftarrow{\text{ق}} = \text{ق}\ \overleftarrow{\text{ى}}$$

ويكون القياس الجبرى لكل من هذين المتجهين موجبا فى هذه الحالة ويساوى معيار المتجه .

بالتعويض فى (١) نجد :

$$\text{ك}\ \overleftarrow{\text{حـ}\ \text{ى}} = \text{أ}\ \overleftarrow{\text{ق}\ \text{ى}}$$

وبحذف $\overleftarrow{\text{ى}}$ من الطرفين

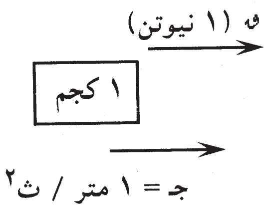
$$\text{ك}\ \text{حـ} = \text{أ}\ \text{ق} \qquad (٢)$$

لتعيين قيمة الثابت أ علينا أن نترجم العلاقة (٢) إلى أرقام .

إننا نعرف وحدات قياس مقدار العجلة ، ولكننا لم نحدد بعد أية وحدات لقياس مقدار القوة وهذا ما سنفعله الآن :

النيوتن :

النيوتن هو وحدة قياس مقدار القوة ويعرف على أنه مقدار القوة التى إذا أثرت على جسم كتلته كيلو جرام واحد اكسبته عجلة مقدارها ١متر / ث^{٢} (شكل ٢٧)



(شكل ٢٧)

بوضع ق = ١ نيوتن ، ك = ١ كجم

، حـ = ١ متر / ث^{٢} فى (٢) نجد (شكل ٢٧)

$$١ \times ١ = \text{أ} \times ١$$

$$\therefore \text{أ} = ١$$

وهكذا يأخذ القانون الثانى لنيوتن فى صورته المتجهة الشكل التالى :

$$\boxed{\frac{\text{د}}{\text{د ن}}\left(\text{ك}\ \overleftarrow{\text{ع}}\right) = \overleftarrow{\text{ق}}} \qquad (٣)$$

وفى حالة ثبات الكتلة يكون :

$$\boxed{\text{ك}\ \overleftarrow{\text{حـ}} = \overleftarrow{\text{ق}}} \qquad (٤)$$

مما يعنى أنه :

" فى حالة ثبات كتلة الجسم اثناء حركته يكون متجه القوة مساويا لحاصل ضرب كتلة الجسم فى متجه عجلته " .

أما إذا استخدمنا القياسات الجبرية للمتجهين $\overleftarrow{ح}$ ، $\overleftarrow{ق}$ فأن العلاقة (٤) تأخذ الشكل المبسط الآتى :

$$\boxed{ك\ ح = ق} \qquad (٥)$$

ومن الواضح أن الكميتين ح ، ق لهما نفس الاشارة .

تنص العلاقة (٥) على أن :

" فى حالة ثبات كتلة الجسم أثناء حركته يكون القياس الجبرى لمتجه القوة مساويا لحاصل ضرب كتلة الجسم فى القياس الجبرى لمتجه عجلته " .

وتتحقق كل من العلاقتين (٤) ، (٥) بفرض الالتزام باستخدام الوحدات المشار إليها على النحو التالى :

$$\boxed{ك\ (\text{كجم}) \times ح\ (\text{متر / ث}^{٢}) = ق\ (\text{نيوتن})} \qquad (٦)$$

هناك العديد من وحدات قياس مقدار القوة غير النيوتن . أهمها نقل الكيلو جرام (ث . كجم) . وثقل الجرام (ث . جم) والداين . وإليك قواعد التحويل بين الوحدات :

١ ث . كجم = ٩٫٨ نيوتن

١ ث . جم = $\frac{١}{١٠٠٠}$ ث . كجم

١ داين = $١٠^{-٥}$ نيوتن = $\frac{١}{٩٨٠}$ ث . جم

وبما أن العلاقة (٥) تعبر عن التناسب الطردى بين مقدارى القوة والعجلة ، فيمكن تعريف ثقل الكيلو جرام على أنه مقدار القوة التى إذا أثرت على جسم كتلته كيلو جرام واحد اكسبته عجلة مقدارها ٩٫٨ متر / $ث^{٢}$

كما يمكن صياغة العلاقة (٦) فى وحدات أخرى بملاحظة أن :

١ كجم = ١٠٠٠ جم ، ١ متر / $ث^{٢}$ = ١٠٠ سم / $ث^{٢}$

، ١ نيوتن = $١٠^{٥}$ داين .

$\therefore$ ١٠٠٠ ك (جم) × ١٠٠ حـ (سم / ث^{٢}) = ١٠^{٥} ق (داين)

وبالقسمة على ١٠^{٥}

$$\boxed{\text{ك (جم) × حـ (سم / ث}^{٢}\text{) = ق (داين)}} \qquad (٧)$$

أى أنه فى القانون الثانى لنيوتن يمكن قياس مقدار الكتلة بالجرام ومقدار العجلة بوحدات سم / ث^{٢} ومقدار القوة بالداين .

بوضع ك = حـ = ١ فى العلاقة السابقة نحصل على ق = ١

إذاً " الداين هو مقدار القوة التى إذا أثرت على جسم كتلته جرام واحد أكسبته عجلة مقدارها سم / ث٢ "

مناقشة القانون الثانى :

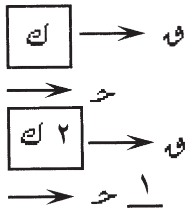
١ - يعبر القانون عن فكرة اسحق نيوتن القائلة بأن عجلة الجسم هى مقياس للقوة المؤثرة عليه .. فإذا أردنا وصف القوة الموثرة على جسم ما ، علينا أن ندرس عجلته ، وذلك مهما كانت طبيعة هذه القوة .

٢ - لنفرض أننا أثرنا بنفس القوة ق على جسمين ، كتلة أحدهما (ك) والثانى (٢ك) . شكل (٢٨)

استنادا إلى العلاقة ك حـ = ق

أى $\text{حـ} = \frac{\text{ق}}{\text{ك}}$

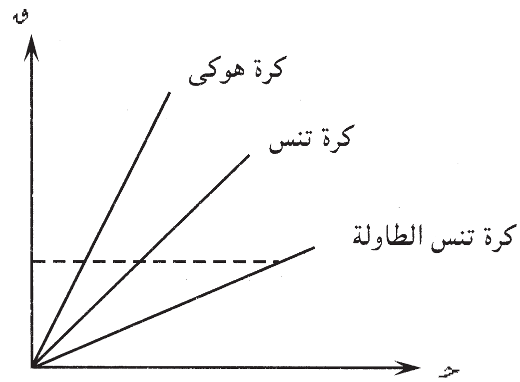
فإن الجسم الأول يكتسب عجلة مقدارها حـ



(شكل ٢٨)

بينما يكتسب الجسم الثانى (الأكبر كتلة) عجلة مقدارها ($\frac{١}{٢}$ حـ) ، مما يعنى أنه تحت تأثير نفس القوة يكتسب الجسم الأكبر كتلة عجلة أقل مقدارا فتبدو الكتلة كعنصر مقاوم لتأثير القوة ، ويتفق هذا مع التعريف الديناميكى للكتلة ، القائل بأن " الكتلة هى مقياس لمدى مقاومة هذا الجسم للقوى التى تعمل على تغيير حالته " .

يوضح الرسم البيانى الآتى العلاقة الخطية بين القوة والعجلة لثلاثة أجسام مختلفة الكتلة ، فيبدو الخط المستقيم المناظر للجسم الأقل كتلة أكثر اقترابا من محور العجلات (شكل ٢٩).



(شكل ٢٩)

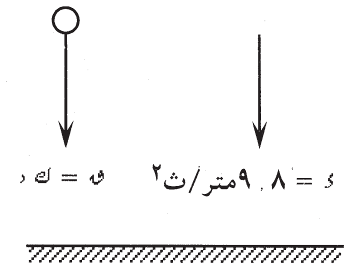
٣ - يعتبر القانون الثانى لنيوتن تعريفا للقوة بدلالة العجلة ، ولكن فى الحالات التى تكون فيها القوة معلومة لدينا من مصادر أخرى ، فإننا نستطيع استخدام هذا القانون لتعيين عجلة الأجسام .

٤ - أثبت جاليليو من خلال تجاربه على الأجسام الساقطة أنه فى حالة عدم وجود مقاومة " تسقط كل الأجسام بنفس العجلة المنتظمة " فقد وجد من خلال تجاربه أن المسافة الرأسية التى يقطعها الجسم الساقط تتناسب مع مربع الزمن ، أى أن : ف $\propto$ ن^2 وهى علاقة تتفق مع القانون الأساسى .

$$ف = \frac{1}{2} جـ ن^2$$

للحركة ذات العجلة المنتظمة .

ولما كانت العجلة التى تكتسبها الأجسام الساقطة ناتجة عن جذب الكرة الأرضية لهذه الأجسام ، فقد رؤى تسمية عجلة السقوط " بعجلة الجاذبية الأرضية " ويرمز لمقدارها بالرمز (د) (شكل ٣٠)



(شكل ٣٠)

وجد بالتجربة أن عجلة الجاذبية الأرضية يعطى بالقيمة التقريبية :

$$\boxed{\text{د} = ٩٫٨ \text{ متر / ث}^{٢}}$$

وتزداد هذه القيمة كلما اتجهنا نحو أحد القطبين لتصبح هناك ٩٫٨٣ م / ث^{٢} تقريبًا ، بينما تقل القيمة كلما اتجهنا نحو خط الاستواء لتصبح هناك ٩٫٧٨ م / ث^{٢} تقريبا .

أما القوة التى تجذب الأجسام لأسفل ، فهى قوة الوزن ، وسنرمز لمقدارها بالرمز (و) .

بتطبيق القانون الثانى لنيوتن على حركة الجسم الساقط ، أى بوضع :

$$\text{ق} = \text{و} \quad ، \quad \text{حـ} = \text{د}$$

نجد

$$\boxed{\text{و (نيوتن)} = \text{ك (كجم)} \times \text{د (متر / ث}^{٢}\text{)}}$$

تبين هذه العلاقة أن " وزن الجسيم ، مقدرا بوحدة ث . كجم .. يساوى عدديا قيمة كتلة هذا الجسم مقدرة بوحدة كجم " .

فمثلا : إذا اعتبرنا جسما كتلته ٧ كجم

أى أن (ك = ٧ كجم) فإن و = ٧ × ٩٫٨ نيوتن

$$\therefore \text{و} = \frac{٧ \times ٩٫٨}{٩٫٨} = ٧ \text{ (ث كجم)}$$

أى أن وزن هذه الكتلة يساوى ٧ ث كجم

وعلى الطالب ألا يخلط بين وحدة الكتلة (كجم) ووحدة القوة أو الوزن (ث . كجم) .

٥ - إذا انعدمت محصلة القوى المؤثرة على جسم ما ، أى إذا كانت :

$$\overrightarrow{\text{ق}} = \overrightarrow{٠}$$

فإن القانون الثانى لنيوتن (٣) يأخذ الصورة الآتية :

$$\frac{\text{د}}{\text{د ن}} \left(\overrightarrow{\text{ك ع}} \right) = \overrightarrow{٠}$$

وبالتالى يجب أن يكون متجه كمية الحركة $\text{ك}\,\vec{\text{ع}}$ ثابتا :

$\vec{\text{م}} = \text{ك}\,\vec{\text{ع}} =$ متجه ثابت

وهكذا .. فالجسم الذى لا تؤثر عليه أية قوة يتحرك بحيث يكون متجه كمية حركته ثابتا ، ويعنى ذلك بالطبع أن الحركة تتم فى خط مستقيم ولكنه قد يتغير مقدار السرعة من لحظة لأخرى (لأن الكتلة قد تكون متغيرة) أما إذا كانت كتلة الجسم ثابتة ، فأن العلاقة السابقة تعطى $\vec{\text{ع}} =$ متجها ثابتا .

أى أن الجسم فى هذه الحالة يتحرك حركة منتظمة ، وهذا هو منطوق القانون الأول لنيوتن .

مثال (١) :

أثبت أنه إذا تحرك جسم فى خط مستقيم ثابت فى الفراغ ، فأن أحد الاحتمالين الآتيين يتحقق ، أما أن تنعدم محصلة القوى المؤثرة عليه أو تكون محصلة القوى المؤثرة عليه موازية للخط المستقيم .

الحل :

ليكن $\vec{\text{س}}$ متجه وحدة مواز للخط المستقيم الذى تحدث عليه الحركة ، $\vec{\text{ص}}$ متجه وحدة عمودى على $\vec{\text{س}}$ كما فى شكل (٣١) .

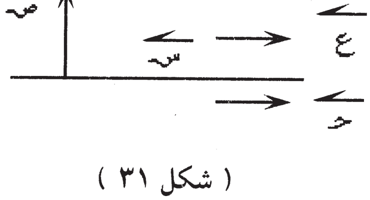
لنفرض أن الحركة غير منتظمة .. إذاً .. فمتجه العجلة لا يساوى المتجه الصفرى .

بما أن الحركة تحدث فى خط مستقيم ، فأن متجه السرعة يوازى هذا الخط بالضرورة ، وبالتالى يمكن التعبير عن متجه السرعة بدلالة قياسه الجبرى منسوبا إلى متجه الوحدة $\vec{\text{س}}$

$$\vec{\text{ع}} = \text{ع}\,\vec{\text{س}}$$

أما متجه العجلة ، فهو

$$\vec{\text{ج}} = \frac{\text{د}\vec{\text{ع}}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د}}{\text{د ن}}\left(\text{ع}\,\vec{\text{س}}\right) = \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}\,\vec{\text{س}}$$



(شكل ٣١)

أى أن متجه العجلة يوازى أيضا الخط المستقيم ، أى أن هذا المتجه عمودى على $\overleftarrow{\text{ص}}$

$$\therefore \overleftarrow{\text{ح}} \odot \overleftarrow{\text{ص}} = \text{صفر}$$

من القانون الثانى لنيوتن

$$\overleftarrow{\text{ح}} = \frac{\overleftarrow{\text{ق}}}{\text{ك}}$$

$$\therefore \overleftarrow{\text{ح}} \odot \overleftarrow{\text{ص}} = \frac{\overleftarrow{\text{ق}}}{\text{ك}} \odot \overleftarrow{\text{ص}} = \text{صفر}$$

$$\therefore \overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{ص}} = \text{صفر}$$

مما يعنى أن متجه محصلة القوى المؤثرة على الجسم ($\overleftarrow{\text{ق}}$) عمودى على $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، أى أنه يوازى الخط المستقيم الذى تحدث عليه الحركة .

ملاحظة :

سندرس العديد من الأمثلة التى يكون فيها الجسم متحركا على نضد أفقى أو على مستو مائل ، واستنادا إلى المثال السابق .. فإن مجموع مركبات القوى فى أى اتجاه عمودى على الخط المستقيم الذى تحدث عليه الحركة يجب أن تنعدم .

مثال (٢) :

تركت ثلاثة أجسام كتلتها ١ ، ٢ ، ٣ كجم لتسقط . عين مقدار القوة المؤثرة على كل منها ، بفرض أنه يمكن إهمال مقاومة الهواء لحركتها .

الحل :

بفرض إهمال مقاومة الهواء ، تصبح القوة الوحيدة المؤثرة على الجسم الساقط هى قوة وزنه واتجاهها رأسيا إلى أسفل كما يوضح (شكل ٣٢) .

أما مقدار هذه القوة ، فنحصل عليه من القانون الثانى لنيوتن :

الجسم الأول :

$ق_{١} = ك_{١}\, د = ١ \times ٩.٨$

$= ٩.٨$ نيوتن $= ١$ ث . كجم

الجسم الثانى :

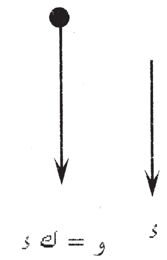
$ق_{٢} = ك_{٢}\, د$

$= ٢ \times ٩.٨$ نيوتن $= ٢$ ث . كجم

الجسم الثالث :

$ق_{٣} = ك_{٣}\, د$

$= ٣ \times ٩.٨$ نيوتن $= ٣$ ث . كجم



(شكل ٣٢)

ويمكن الحصول على هذه النتائج مباشرة بملاحظة أن مقدار الوزن (مقدرا بوحدة ث. كجم) يساوى عدديا مقدار الكتلة (مقدرا بوحدة كجم) .

مثال (٣) :

تتحرك سيارة كتلتها ١.٨ طن على طريق أفقى مستقيم بسرعة ٦٠ كم / س .

أوقفت السيارة محركها فاستمرت فى التحرك لمسافة ٢٠٠ متر حتى سكنت تماما . أوجد مقدار قوة المقاومة باعتبار أنها ثابتة طوال فترة حركة السيارة .

الحل :

ليكن **أ** الموضع الذى أوقف عنده محرك السيارة ، ب الموضع الذى سكنت عنده .

من الواضح أن الحركة من ا إلى ب تتم تحت تأثير قوة واحدة فقط هى قوة المقاومة ، وذلك لأن محصلة القوتين الأخريين - قوة رد الفعل العمودى وقوة الوزن - تنعدم .

نعتبر متجه وحدة $\overleftarrow{س}$ فى عكس اتجاه الحركة ، وليكن جـ ، ف القياسين الجبريين لمتجه العجلة $\overleftarrow{جـ}$ ومتجه الازاحة $\overleftarrow{ف}$ على الترتيب (شكل ٣٣)

من الواضح أن :

ف = - ٢٠٠ متر .

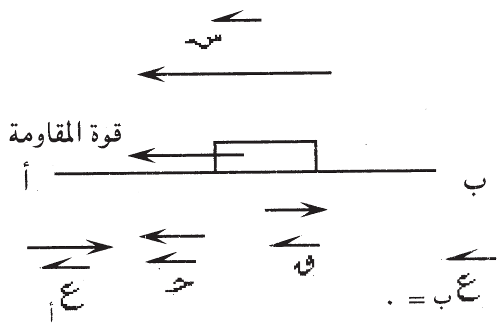
بتطبيق القانون المعروف

$\text{ع}_{\text{ب}}^{٢} - \text{ع}_{\text{أ}}^{٢} = ٢ \text{ جـ ف}$

مع أخذ $\text{ع}_{\text{أ}} = -٦٠$ كم / س

$= \frac{-٦٠ \times ١٠^{٣}}{٣٦٠٠}$ متر / ث

، ع = صفر



(شكل ٣٣)

نجد

$\therefore -\left(\frac{-٦٠ \times ١٠^{٢}}{٣٦٠٠}\right)^{٢} = ٢ \text{ جـ } (-٢٠٠)$

$\therefore \text{جـ} = \frac{٢٥}{٣٦}$ متر / ث^{٢}

أما قوة المقاومة فنحصل على مقدارها من القانون الثانى لنيوتن :

م = ك جـ

مع مراعاة أن يحسب مقدار الكتلة بوحدة الكيلو جرام

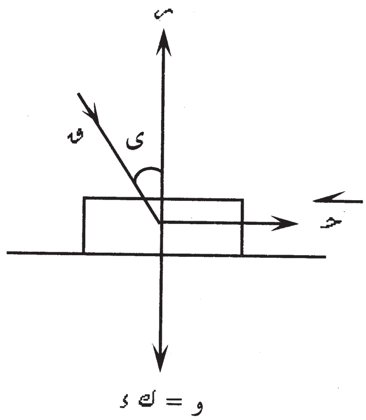
$\therefore \text{م} = ١٫٨ \times ١٠^{٣} \times \frac{٢٥}{٣٦}$

= ١٢٥٠ نيوتن

مثال (٤) :

أثرت قوة ق يصنع اتجاهها زاوية حادة قياسها ى مع الرأسى إلى أسفل على جسم موضوع على نضد أفقى أملس . عين عجلة الجسم الناشئة عن هذا التأثير . وكذلك مقدار رد الفعل العمودى للنضد .

الحل



(شكل ٣٤)

بما أن النضد أملس ، فإن قوة المقاومة تنعدم .

ليكن ر مقدار رد الفعل العمودى .

، ح مقدار العجلة الناتجة (شكل ٣٤)

بما أن الحركة أفقية ، فإن مجموع مركبات القوى فى الاتجاه الرأسى تنعدم

∴ ر − ك د − ق جتا ى = صفر

∴ ر = ك د + ق جتا ى

وهى علاقة تحدد ر . من الواضح أن مقدار رد الفعل يكون مختلفا عن مقدار الوزن ، ويساويه فقط فى حالة أن يكون جتا ى = صفر أى عندما تكون القوة ق أفقية .

من قانون نيوتن الثانى فى صورته القياسية نجد أن :

ك ح = ق جا ى

∴ ح = $\frac{ق}{ك}$ جا ى

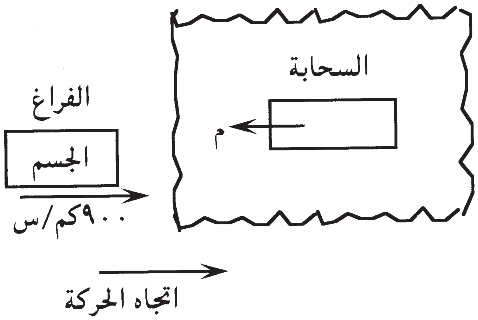
أى أن الجسم يتحرك بعجلة ثابتة . من الواضح أن مقدار ح يزداد كلما ازداد قياس الزاوية ى ، ويصبح أكبر ما يمكن عندما يكون جا ى = ١ أى عندما تكون القوة ق أفقية

مثال (٥) :

يتحرك جسم طائر كتلته ٨٠٠ كجم فى الفراغ حركة منتظمة بسرعة ٩٠٠ كم / س . دخل هذا الجسم فجأة فى سحابة محملة بالغبار فأثرت عليه بقوة احتكاك (مقاومة) مقدارها $\frac{١}{٢}$ ث . كجم لكل كيلو جرام من كتلته .

أوجد سرعة الجسم بعد خروجه من السحابة ، علما بأنه استمر داخلها لمدة ٢٠ ثانية .

الحل :



(شكل ٣٥)

عندما يكون الجسم داخل السحابة تؤثر عليه قوة مقاومة تعمل فى اتجاه مضاد لاتجاه حركته ، ليكن م مقدار هذه القوة (شكل ٣٥)

$$\text{م} = \frac{١}{٢} \times ٨٠٠ = ٤٠٠ \text{ ث . كجم}$$

$$= ٤٠٠ \times ٩٫٨ \text{ نيوتن}$$

تسبب هذه القوة حركة تقصيرية بعجلة مقدارها جـ يمكن حسابها من القانون الثانى لنيوتن .

$$\text{ق (نيوتن) = ك (كجم) جـ (متر / ث}^{٢}\text{)}$$

$$\therefore ٤٠٠ \times ٩٫٨ = ٨٠٠ \text{ جـ}$$

$$\therefore \text{جـ} = \frac{٤٠٠ \times ٩٫٨}{٨٠٠} = ٤٫٩ \text{ متر / ث}^{٢}$$

$$= \frac{٤٫٩ \times ١٠^{-٣}}{\frac{١}{٣٦٠٠} \times \frac{١}{٣٦٠٠}} \text{ كم / س}^{٢}$$

$$= ٤٩ \times ٣٦ \times ٣٦ \text{ كم / س}^{٢}$$

يتحرك الجسم بهذه العجلة لمدة ٢٠ ثانية ، أى $\frac{٢٠}{٣٦٠٠}$ ساعة

بتطبيق القانون المعروف ع = ع. − جـ ن

مع وضع ع. = ٩٠٠ كم / س نجد

$$\text{ع} = ٩٠٠ - (٤٩ \times ٣٦ \times ٣٦) \times \left(\frac{٢٠}{٣٦٠٠} \right)$$

$$= ٥٤٧٫٢ \text{ كم / س}$$

مثال (٦) :

يتحرك جسم متغير الكتلة ، كتلته $ك = ٢ ن + ١$ فى خط مستقيم ثابت ، وكان متجه إزاحته يعطى بالعلاقة $\overleftarrow{ف} = (\frac{١}{٢} ن^{٢} + ن)\overleftarrow{س}$ حيث $\overleftarrow{س}$ متجه وحدة مواز للخط المستقيم .

أوجد كمية حركة هذا الجسم واستنتج قانون القوة المؤثرة عليه .

الحل

$ك = ٢ ن + ١$

متجه السرعة $\overleftarrow{ع} = \frac{ء \overleftarrow{ف}}{ء ن} = \frac{ء}{ء ن}(\frac{١}{٢} ن^{٢} + ن)\overleftarrow{س}$

$= (ن + ١)\overleftarrow{س}$

متجه كمية الحركة $\overleftarrow{م} = ك \overleftarrow{ع}$

$= (٢ ن + ١)(ن + ١)\overleftarrow{س} = (٢ ن^{٢} + ٣ ن + ١)\overleftarrow{س}$

متجه القوة .. من القانون الثانى لنيوتن نجد أن :

$\overleftarrow{ق} = \frac{ء}{ء ن}(ك \overleftarrow{ع}) = \frac{ء \overleftarrow{م}}{ء ن}$

$= \frac{ء}{ء ن}(٢ ن^{٢} + ٣ ن + ١)\overleftarrow{س} = (٤ ن + ٣)\overleftarrow{س}$

أى أن القوة المؤثرة على الجسم تكون فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{س}$. ويساوى مقدارها $(٤ ن + ٣)$

تمارين (١ - ٣)

(١) يتحرك جسم كتلته تحت تأثير القوتين .

$\overrightarrow{\text{ق}} = ٣ \text{ ك } \overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٢} = ٥ \text{ ك } \overrightarrow{\text{ص}} - ٢ \text{ ك } \overrightarrow{\text{س}}$

حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجها وحدة متعامدان

أوجد متجه عجلة الجسيم وعين مقداره .

(٢) يتحرك جسيم تساوى كتلته الوحدة . وكان متجه سرعته يعطى كدالة فى الزمن من العلاقة

$\overrightarrow{\text{ع}} = (\text{أ ن}^٢ + \text{ب ن}) \overrightarrow{\text{س}}$

حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ متجه وحدة ثابت . عين الثابتين أ ، ب إذا علمت أن القوة المؤثرة على هذا الجسم ثابتة وتعطى من العلاقة $\overrightarrow{\text{ق}} = ٥ \overrightarrow{\text{س}}$

(٣) يتحرك جسيم تساوى كتلته الوحدة تحت تأثير القوى الثلاث :

$\overrightarrow{\text{ق}_١} = \overrightarrow{\text{س}} + \text{أ} \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٢} = -٢ \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_٣} = ٢ \overrightarrow{\text{ص}} + \text{ب} \overrightarrow{\text{س}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجها وحدة متعامدان ، أ ، ب ثابتان .

فأذا علم أن متجه إزاحة الجسيم يعطى كدالة فى الزمن من العلاقة

$\overrightarrow{\text{ف}} = \overrightarrow{\text{س}} + (\frac{١}{٢} \text{ن}^٢ + \text{ن}) \overrightarrow{\text{ص}}$

عين الثابتين أ ، ب

(٤) يتحرك جسيم بحيث كانت مركبتا سرعته فى الاتجاهين الأفقى والرأسى لأعلى هما على الترتيب $\text{ع}_{\text{س}} = ٢$ ، $\text{ع}_{\text{ص}} = -٩٫٨ \text{ ن} + ٢$ مقدرين بوحدة متر / ث . عين مقدار واتجاه السرعة الابتدائية لهذا الجسيم ، وكذلك متجه القوة المؤثرة عليه ، علما بأن كتلته تساوى ١ كجم .

(٥) أثرت قوة مقدارها ١٠٠ نيوتن ويصنع اتجاهها زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسى لأسفل على جسم كتلته ٢٠ كجم موضوع على أرض أفقية ملساء .

أوجد العجلة الناشئة وكذلك مقدار قوة رد الفعل العمودى .

(٦) بدأت دبابة كتلتها ٢٠ طنا وقوة آلتها $\frac{١}{٢}$ وزن طن فى التحرك على أرض افقية . وكانت قوة المقاومة لحركتها تساوى فى المقدار ٢٠ ث . كجم لكل طن من كتلتها . أوجد سرعة الدبابة بعد مضى ٢٥٠ ثانية من بدء الحركة .

(٧) يتحرك جسم على هيئة أسطوانية دائرية قائمة ارتفاعها ٥٠ سم ، ونصف قطر قاعدتها ١٠ سم كتلته ١٠ كجم حركة منتظمة بسرعة ٥ متر / ث دخل هذا الجسم فى سحابة تحمل غبارا فأثرت عليه بقوة مقاومة مقدارها ٠,٠١ ث . جم لكل سنتيمتر مربع من مساحته الجانبية . أوجد سرعة الجسم بعد خروجه من السحابة علما بأنه ظل يتحرك داخلها لمدة ٣٠ ثانية .

(٨) اطلقت رصاصة كتلتها ٢٥ جم بسرعة ٢٠٠ متر / ث على حاجز ثابت فغاصت فيه مسافة ٥ سم حتى سكنت . عين مقدار قوة مقاومة الحاجز لحركة الرصاصة . علما بأنه ظل ثابتا طوال الوقت .

(٩) تتحرك كرة معدنية كتلتها ١٠٠ جرام فى خط مستقيم بسرعة ثابتة مقدارها ١٠ متر / ث فى وسط يحمل غبارا ، فإذا كان الغبار يلتصق بسطحها بمعدل ثابت يساوى ٠,٠٦ جم فى الثانية . أوجد كتلة الكرة والقوة المؤثرة عليها عند أى لحظة زمنية ن . علما بأنه عند بدء الحركة كانت الكرة خالية تماما من الغبار .

(١٠) تتحرك سيارة كتلتها ١٩٦٠ كجم بسرعة ٦٣ كم / س . أثرت عليها قوة الفرامل ومقدارها ١٢٥٠ ث كجم . أوجد المسافة التى تقطعها العربة حتى تقف .

(١١) أثرت قوة أفقية مقدارها ١٠٠٠ ث كجم على سيارة كتلتها ٤ طن تسير على طريق أفقية . فإذا بدأت السيارة من السكون وبلغت سرعتها ٤,٩ متر / ث فى ١٠ ثوان . أوجد المقاومات .

(١٢) سقط جسم كتلته ٢ كجم من ارتفاع ١٠ أمتار نحو أرض رملية فغاص فيها مسافة ٥ سم احسب بثقل الكيلو جرام مقاومة الرمل بفرض ثبوتها .

(١٣) أثرت قوة أفقية $\overleftarrow{ق}$ فى جسم كتلته ٢ كجم موضوع على مستوى أفقى فحركته من السكون ٢٤٥ سم فى ١٠ ثوان ضد مقاومة ثابتة تعادل $\frac{١}{١٠}$ وزن الجسم أوجد مقدار ق .
وإذا أنقطع تأثير القوة فى نهاية هذه المدة وبقيت المقاومة بدون تغير . أوجد متى يصل الجسم لحالة السكون .

(١٤) قطار كتلته ٢٤٥ طنا (بما فى ذلك القاطرة) يتحرك بعجلة منتظمة مقدارها ١٥ سم/ث ، فإذا كانت مقاومة الهواء والاحتكاك تعادل ٤ ثقل . كجم لكل طن من كتلة القطار ، فأوجد قوة آلات القاطرة ، وإذا انفصلت عن القطار العربة الأخيرة وكتلتها ٤٩ طنا بعد أن تحرك القطار من السكون لمدة ٤.٩ دقيقة . فأوجد العجلة التى يتحرك بها القطار وكذا الزمن الذى تأخذه العربة المنفصلة حتى تقف .

(١٥) بالون كتلته ١٠٥٠ كجم يتحرك بسرعة منتظمة رأسيا إلى أعلى سقط منه جسم كتلته ٧٠ كجم . أوجد العجلة التى يصعد بها البالون بعد ذلك . وإذا كانت سرعة البالون قبل سقوط الجسم ٥٠ سم / ث . أوجد – اولا : المسافة التى يقطعها البالون بعد ذلك فى ١٠ ثوان .

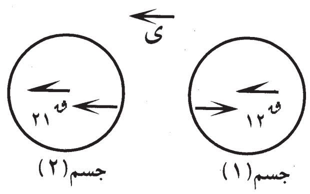
ثانيا : المسافة بين البالون والجسم بعد هذه المدة .

(١٦) يتحرك جسيم كتلته الوحدة بتأثير قوة $\overleftarrow{ق} = أ \overleftarrow{س} + ب \overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدين وكان متجه إزاحة الجسيم يعطى كدالة فى الزمن من العلاقة :
$\overleftarrow{ف} = (٢ ن^{٢} + ١) \overleftarrow{س} + (٣ ن^{٢} + ١) \overleftarrow{ص}$ أوجد الثابتين أ ، ب .

القانون الثالث لنيوتن

لكل فعل رد فعل مساو له فى المقدار ومضاد له فى الاتجاه

فإذا أثر جسم (١) على جسم (٢) بقوة نرمز لها بالرمز $\overleftarrow{\text{ق}}_{١٢}$ مثلا ، فإن الجسم (٢) يؤثر على الجسم (١) بقوة $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢١}$ تحقق العلاقة (شكل ٣٦) .



(شكل ٣٦)

$$\overleftarrow{\text{ق}}_{٢١} = - \overleftarrow{\text{ق}}_{١٢}$$

أى أن :

$$\boxed{\overleftarrow{\text{ق}}_{٢١} + \overleftarrow{\text{ق}}_{١٢} = \overleftarrow{0}}$$

تتيح العلاقة الأخيرة التعبير عن القانون الثالث لنيوتن فى صيغة جديدة "محصلة القوى المتبادلة بين أى جسمين تنعدم" .

تدل العلاقة الأخيرة عن أن القوانين $\overleftarrow{\text{ق}}_{٢١}$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_{١٢}$ متوازيتين ، لذلك يمكن التعبير عن كل منهما بدلالة قياسها الجبرى .

فإذا كان :

$$\overleftarrow{\text{ق}}_{٢١} = \text{ق}_{٢١} \overleftarrow{\text{ى}} \quad ، \quad \overleftarrow{\text{ق}}_{١٢} = \text{ق}_{١٢} \overleftarrow{\text{ى}}$$

حيث $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة مواز للقوتين ، يأخذ القانون الثالث لنيوتن الشكل البسيط الآتى :

$$\boxed{\text{ق}_{٢١} + \text{ق}_{١٢} = \text{صفر}}$$

مما يعنى أن :

"مجموع القياسات الجبرية للقوى المتبادلة بين أى جسمين تنعدم" .

مناقشة القانون الثالث :

١ - إذا كان القانونان الأول والثانى لنيوتن يشرحان كيفية تأثير القوى على الجسم، فالقانون الثالث لنيوتن يحدد لنا القاعدة التى يخضع لها التأثير المتبادل بين جسمين .

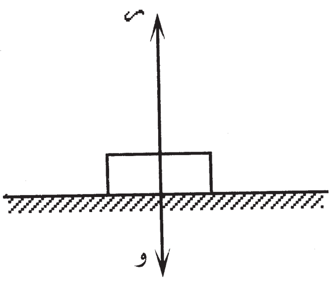
٢ - تؤيد التجربة صحة القانون الثالث لنيوتن ، فإذا ما ضغطت بأصبعك على نضد مثلا ، فإنك ستشعر بضغطه على أصبعك وكلما زاد ضغطك على النضد ، ازداد ضغط النضد على أصبعك .

٣ - لايعنى انعدام المحصلة ق٢١ + ق١٢ أن تأثير إحدى القوتين يلاشى تأثير الأخرى ، إذ أن أى منهما تؤثر فى جسم واحد فقط دون الآخر . فإذا رجعنا إلى شكل (٣٦) لوجدنا القوة ق٢١ تؤثر فى الجسم (١) والقوة ق١٢ تؤثر فى الجسم (٢) .

مثال توضيحى :

الجسم الساكن على نضد أفقى .

نعتبر جسما ساكنا على نضد أفقى . من التلامس ينتج أن كلا من الجسم والنضد يؤثر على الآخر بقوة ما ، والقوتان تحققان القانون الثالث لنيوتن .



تأثير النضد على الجسم

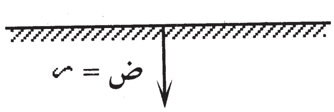
(شكل ٣٧)

عرفنا من قبل أن النضد يؤثر على الجسم الموجود فوقه بقوة تسمى قوة رد الفعل المحصل ، ومقدارها ر .

وبما أن الجسم متزن تحت تأثير هذه القوة وقوة وزنه الموجهة رأسيا لأسفل ، ينتج أن قوة رد الفعل المحصل تكون موجهة رأسيا لأعلى ، أى أنها تساوى رد الفعل العمودى (شكل ٣٧) وإذا كان (و) هو وزن الجسم ، ينتج من الاتزان أن ر = و

أما إذا اعتبرنا تأثير الجسم على النضد ، فهو يتمثل فى قوة تحقق القانون الثالث لنيوتن ، أى أنها تكون موجهة رأسيا لأسفل ويساوى مقدارها وزن الجسم (شكل ٣٨) تسمى هذه القوة قوة ضغط الجسم على النضد ويرمز لها بالرمز ض

أى أن : ض = و



تأثير الجسم على النضد

(شكل ٣٨)

تطبيقات بسيطة على قوانين نيوتن للحركة

١ - جسم موضوع داخل مصعد متحرك بعجلة منتظمة :

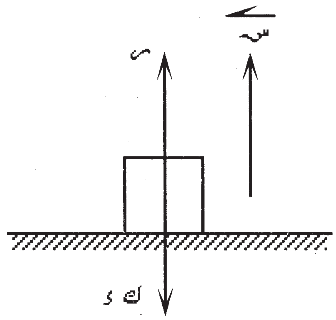
أ) الجسم الموضوع على أرض المصعد :

نعتبر جسما ذا كتلة $ك$ موضوعا على أرض مصعد يتحرك رأسيًا بعجلة منتظمة مقدارها $ح$. بما أن الجسم ثابت داخل المصعد ، فهو يكتسب نفس عجلته .

القوى المؤثرة على الجسم هى :

١ - قوة الوزن (نرمز لها بالرمز $\overrightarrow{ق_1}$) ومقدارها $ك\,د$ شكل (٣٩) وموجهة رأسيًا لأسفل .

٢ - قوة رد الفعل التى يؤثر بها قاع المصعد على الجسم (نرمز لها بالرمز $\overrightarrow{ق_2}$) ومقدارها $ر$ وهى موجهة رأسيًا لأعلى . وذلك لأنه لاتوجد قوة احتكاك بين الجسم وقاع المصعد . إذا أن الجسم ساكن على القاع .



(شكل ٣٩)

ليكن $\overrightarrow{س}$ متجه وحدة اتجاهه هو الرأسى لأعلى (شكل ٣٩) .

يمكن أن تكتب كل من القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ بدلالة $\overrightarrow{س}$ كالآتى :

$$\overrightarrow{ق_1} = -ك\,د\,\overrightarrow{س}$$

$$، \quad \overrightarrow{ق_2} = ر\,\overrightarrow{س}$$

أما عجلة الجسم ، فهى نفسها عجلة المصعد ويمكن كتابتها على الصورة $\overrightarrow{ح} = \pm\, ح\,\overrightarrow{س}$

وتؤخذ الاشارة الموجبة إذا كانت عجلة المصعد موجهة لأعلى

والإشارة السالبة إذا كانت عجلة المصعد موجهة لأسفل .

بتطبيق القانون الثانى لنيوتن على حركة الجسم نجد أن :

$$ك\,\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} \qquad (١)$$

نعتبر الحالات الثلاث الآتية :

١ - المصعد ساكن أو متحرك بسرعة منتظمة :

في هذه الحالة نضع $\text{حـ} = \text{صفر}$

$$\therefore \overleftarrow{\text{ق}_١} + \overleftarrow{\text{ق}_٢} = \overleftarrow{٠}$$

$$\therefore -\text{ك د}\ \overleftarrow{\text{س}} + \text{ر}\ \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{٠}$$

$$\therefore (-\text{ك د} + \text{ر})\ \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{٠}$$

$$\therefore -\text{ك د} + \text{ر} = \text{صفر}$$

$$\therefore \boxed{\text{ر} = \text{ك د}} \qquad (٢)$$

وهى علاقة معروفة لدينا وتبين أن مقدار قوة رد فعل قاع المصعد على الجسم (أو مقدار قوة ضغط الجسم على قاع المصعد) يساوى مقدار وزن الجسم .

٢ - المصعد يتحرك لأعلى :

في هذه الحالة يكون :

$$\overleftarrow{\text{حـ}} = \text{حـ}\ \overleftarrow{\text{س}}$$

بالتعويض فى هذه القيمة فى (١) نجد :

$$\text{ك حـ}\ \overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ق}_١} + \overleftarrow{\text{ق}_٢}$$

$$\therefore \text{ك حـ}\ \overleftarrow{\text{س}} = -\text{ك د}\ \overleftarrow{\text{س}} + \text{ر}\ \overleftarrow{\text{س}}$$

وبحذف $\overleftarrow{\text{س}}$ من الطرفين :

$$\therefore \text{ك حـ} = -\text{ك د} + \text{ر}$$

$$\therefore \boxed{\text{ر} = \text{ك}\ (\text{د} + \text{حـ})} \qquad (٣)$$

بمقارنة (٣) ، (٢) نلاحظ أن مقدار رد فعل القاع على الجسم والذى تبعا لقانون نيوتن الثالث يساوى مقدار قوة ضغط الجسم على قاع المصعد ، قد ازداد بالقيمة (ك حـ) عما لو

كان المصعد ساكنا أو متحركا بسرعة منتظمة . ونعبر عن ذلك بقولنا أن " الجسم الموجود داخل المصعد المتحرك لأعلى بعجلة منتظمة مقدارها ح يشعر بأن عجلة الجاذبية قد ازداد مقدارها بالقيمة ح)

٣ - المصعد يتحرك لأسفل :

فى هذه الحالة يكون :

$$\overrightarrow{\text{ح}} = - \text{ح} \ \overrightarrow{\text{س}}$$

بالتعويض فى (١) بهذه القيمة نجد :

$$- \text{ك ح} \ \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{ق}_1} + \overrightarrow{\text{ق}_2}$$

$$\text{أو} \ - \text{ك ح} \ \overrightarrow{\text{س}} = - \text{ك ء} \ \overrightarrow{\text{س}} + \text{ر} \ \overrightarrow{\text{س}}$$

$$\therefore \ - \text{ك ح} = - \text{ك ء} + \text{ر}$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{ر} = \text{ك} \ (\text{ء} - \text{ح})} \qquad (٤)$$

بمقارنة (٤) مع (٢) نلاحظ أن مقدار قوة رد فعل القاع على الجسم (والذى تبعا لقانون نيوتن الثالث يساوى مقدار قوة ضغط الجسم على قاع المصعد) قد نقص بمقدار ك ح عما لو كان المصعد ساكنا أو متحركا بسرعة منتظمة .

ونعبر عن ذلك بقولنا أن " الجسم الموجود داخل المصعد المتحرك لأسفل بعجلة منتظمة مقدارها ح يشعر بأن عجلة الجاذبية قد نقص مقدارها بالقيمة ح "

وكلما إزداد مقدار العجلة التى يهبط بها المصعد ، نقص مقدار قوة رد الفعل ر ، حتى إذا ما هبط المصعد بعجلة الجاذبية ء (حالة الهبوط الحر) تلاشى مقدار قوة رد الفعل ، وذلك لأن كل من الجسم والمصعد يكون فى هذه الحالة هابطا بعجلة واحدة وهى عجلة الجاذبية الأرضية ويكون الجسم على وشك ترك قاع المصعد .

ب) الميزان الزنبركى المعلق فى سقف المصعد :

نعتبر الآن جسما ذا كتلة ك معلقا فى نهاية ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد يتحرك رأسيا بعجلة منتظمة مقدارها حـ

بما أن الجسم والميزان ثابتان داخل المصعد فهما يكتسبان نفس عجلته .

القوى المؤثرة على الجسم .

١- قوة الوزن (نرمز لها بالرمز $\overleftarrow{\text{ق}_1}$) ومقدارها ك د وموجهة رأسيًا لأسفل .

٢ - قوة شد الزنبرك للجسم (ونرمز لها بالرمز $\overleftarrow{\text{ق}_2}$) وهى موجهة رأسيًا لأعلى ، ومقدارها ش مثلاً . وهو نفس مقدار الشد الذى يجذب به الجسم الزنبرك لأسفل .

ليكن $\overleftarrow{\text{س}}$ متجه وحدة موجه رأسيًا لأعلى (شكل ٤٠)

$\therefore \overleftarrow{\text{ق}_1} = -\text{ك د}\ \overleftarrow{\text{س}}$

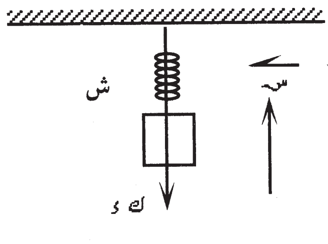
، $\overleftarrow{\text{ق}_2} = \text{ش}\ \overleftarrow{\text{س}}$

إذا كان $\overleftarrow{\text{حـ}}$ هو متجه عجلة الجسم (أو المصعد) .

فإن القانون الثانى لنيوتن

عند تطبيقه على الجسم يعطى :

$\text{ك}\ \overleftarrow{\text{حـ}} = \overleftarrow{\text{ق}_1} + \overleftarrow{\text{ق}_2}$



(شكل ٤٠)

يمكن الآن استخدام نتائج البند السابق مع إحلال قوة الشد مكان قوة رد الفعل ، نعتبر الحالات الثالث الاتية :

أ) المصعد ساكن أو متحرك بسرعة منتظمة :

$$\text{ش} = \text{ك د} \qquad (٥)$$

أى أن مقدار قوة الشد يساوى مقدار وزن الجسم .

ب) المصعد يتحرك لأعلى :

ش = ك (د + حـ)　　　　　　　　(٦)

أى أن مقدار الشد فى هذه الحالة يزداد بمقدار (ك حـ) عنه فى الحالة الأولى .

جـ) المصعد يتحرك لأسفل :

ش = ك (د − حـ)　　　　　　　　(٧)

أى أن مقدار الشد فى هذه الحالة ينقص بمقدار (ك حـ) عنه فى الحالة الأولى .

مثال (١) :

شخص كتلته ٧٠ كجم موجود داخل مصعد . عين رد فعل المصعد على هذا الشخص بوحدة النيوتن فى كل من الحالات الآتية :

أولا : إذا تحرك المصعد بسرعة منتظمة .

ثانيا : إذا تحرك المصعد بعجلة منتظمة مقدارها ١,٢ متر / ث^{٢} موجهة رأسيًا إلى أعلى .

ثالثا : إذا تحرك المصعد بعجلة منتظمة مقدارها ١,٨ متر / ث^{٢} موجهة رأسيًا إلى أسفل .

الحل

أولا : ∵ ر = ك د

∴ ر = ٧٠ × ٩,٨

= ٦٨٦ نيوتن

ثانيا ∵ ر = ك (د + حـ)

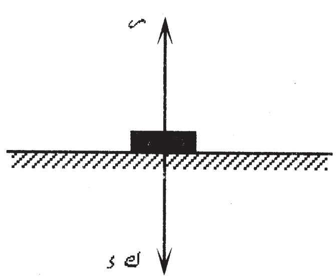
∴ ر = ٧٠ (٩,٨ + ١,٢)

= ٧٠ × ١١ = ٧٧٠ نيوتن

ثالثا ∵ ر = ك (د − حـ)

∴ ر = ٧٠ (٩,٨ − ١,٨)

= ٧٠ × ٨ = ٥٦٠ نيوتن



(شكل ٤١)

مثال (٢) :

يتحرك مصعد رأسيًا بعجلة مقدارها ١٤٠ سم / ث٢ معلق فى سقفه ميزان زنبركى يحمل جسما كتلته ٣٥ كجم .

أوجد الوزن الظاهرى بثقل الكيلو جرام الذى يبينه الميزان .

أولا : إذا كان المصعد صاعدا .

ثانيًا : كان المصعد هابطا .

ملاحظة :

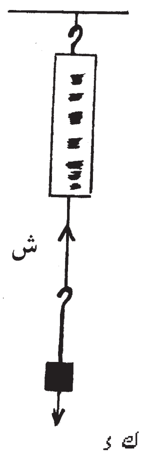
الوزن الظاهرى هو قراءة الميزان الزنبركى (أى الشد) .

(أولا) ∵ ش = ك (ى + حـ)

∴ ش = ٣٥ × ١٠٠٠ (٩٨٠ + ١٤٠)

= ٣٥ × ١٠٠٠ × ١١٢٠ داين

$$= \frac{٣٥ \times ١٠٠٠ \times ١١٢٠}{٩٨٠ \times ١٠٠٠} = ٤٠ \text{ ث . كجم}$$



(شكل ٤٢)

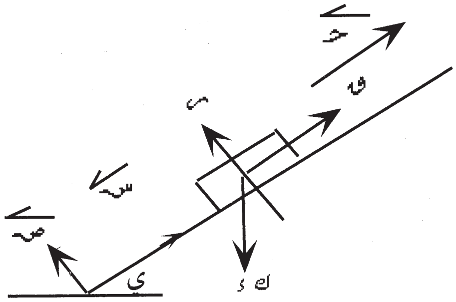
(ثانيا) ∵ ش = ك (ى − حـ)

∴ ش = ٣٥ × ١٠٠٠ (٩٨٠ − ١٤٠)

= ٣٥ × ١٠٠٠ × ٨٤٠ داين

$$= \frac{٣٥ \times ١٠٠٠ \times ٨٤٠}{٩٨٠ \times ١٠٠٠} = ٣٠ \text{ ث . كجم}$$

٢- حركة جسم على مستوى مائل أملس :



(شكل ٤٣)

نعتبر جسما كتلته ك يتحرك على خط أكبر ميل لمستو أملس يميل على الأفقى بزاوية ى تحت تأثير قوة تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى ومقدارها ق

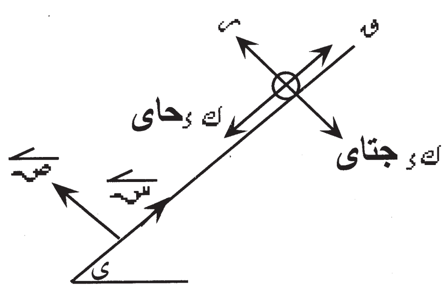
القوة المؤثرة على الجسم هى (شكل ٤٣) .

(١) القوة المعطاة التى تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى ومقدارها ق .

(٢) قوة الوزن وتعمل رأسيًا لأسفل ومقدارها ك د ، حيث د مقدار عجلة الجاذبية الأرضية .

يمكن تحليل هذه القوة إلى مركبتين إحداهما فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لاسفل ومقدارها (ك د حاى)والآخرى فى اتجاه عمودى على المستوى ونحوه ومقدارها (ك د حتاى)كما فى شكل (٤٤) .

(٣) القوة التى يؤثر بها المستوى على الجسم (قوة رد الفعل) وتعمل فى اتجاه عمودى على المستوى ولأعلى (لاحظ أن المستوى أملس ، لذلك لا توجد قوة احتكاك) . وقد اسمينا هذه القوة من قبل " قوة رد الفعل العمودى " . وليكن ر مقدار هذه القوة ، وهو مجهول يجب تعيينه . من المفيد إدخال متجهى وحدة متعامدين س ، ص . أولهما فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى، وثانيهما عمودى على هذا الخط ولأعلى (شكل ٤٤) .



(شكل ٤٤)

وليكن $\overleftarrow{\text{ح}}$ متجه عجلة الجسيم . من الواضح أن هذا المتجه يوازى المتجه $\overleftarrow{\text{س}}$ وذلك لأن الحركة تحدث موازية لهذا المتجه .

$$\overleftarrow{\text{ح}} = \text{ح}\ \overleftarrow{\text{س}}$$

حيث ح هنا القياس الجبرى لمتجه $\overleftarrow{\text{ح}}$ بالنسبة لمتجه الوحدة $\overleftarrow{\text{س}}$ يكون ح > . فى حالة أن تكون الحركة على المستوى لأعلى (أى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{س}}$) بينما يكون ح < . فى حالة الحركة على المستوى لأسفل (فى عكس اتجاه $\overleftarrow{\text{س}}$) . أما إذا كانت الحركة منتظمة ، فإن ح = صفر

بما أن الحركة تحدث موازية للمتجه $\overleftarrow{\text{س}}$ ، فان مجموع مركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{ص}}$ يجب أن ينعدم .

∴ ر − ك د حتا ى = صفر

ومنها يتحدد مقدار قوة رد الفعل العموى مباشرة :

ر = ك د حتا ى (٢)

بتطبيق القانون الثانى لنيوتن على حركة الجسم الموازية للمتجه $\overleftarrow{\text{س}}$ نجد :

ك ح = ق − ك د حا ى

∴ ح = $\frac{\text{ق}}{\text{ك}}$ − د حا ى (٣)

وفى الحالة الخاصة التى تنعدم فيها القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ (ق = صفر) ، فأن

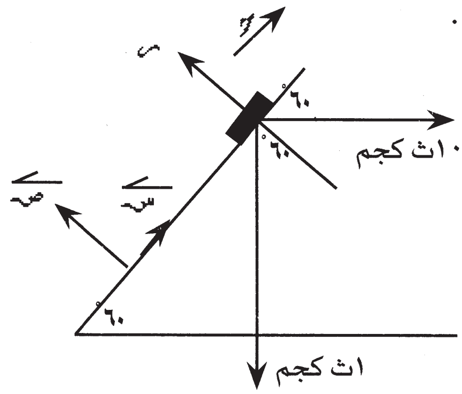
ح = − د حا ى

مثال (٣) :

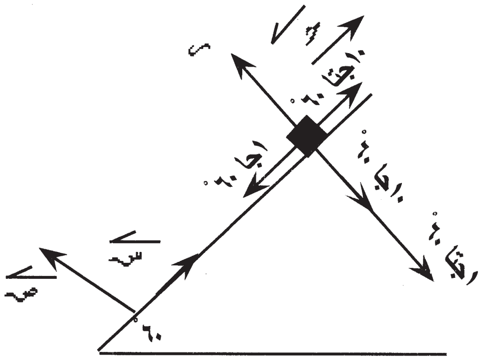
وضع جسم كتلته ١ كجم على مستو أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° ثم أثر عليه بقوة أفقية نحو المستوى مقدارها ١٠ ث . كجم . ويقع خط عملها فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل للمستوى .أوجد العجلة الناشئة ومقدار قوة رد الفعل العمودى .

الحل

يبيّن شكل (٤٥) القوى المؤثرة على الجسم وتأخذ متجهى وحدة $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ كما هو مبين بالشكل .



(شكل ٤٥)



(شكل ٤٦)

وبتحليل القوة المعطاة فى اتجاهى المستوى والعمودى عليه كما فى شكل (٤٦) ،

∵ مجموع مركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{ص}$ يساوى صفرا شكل (٤٥) .

∴ ر − (١٠ جا ٦٠° + جتا ٦٠°) = ٠

∴ ر − ٥ $\sqrt{٣}$ − $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ ر = ٥ $\sqrt{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ ث .كجم ≃ ٩,١٦ ث . كجم

وبتطبيق القانون الثانى لنيوتن على الحركة فى اتجاه $\overleftarrow{س}$

∴ ١ × جـ = (١٠ جتا ٦٠° − ١ جا ٦٠°) × ٩,٨

لاحظ أن مقادير القوى تقدر بوحدة النيوتن ومقدار العجلة بوحدة متر / ث^{٢})

∴ جـ = (٥ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) × ٩,٨

≃ (٥ − ٠,٨٦٦) × ٩,٨

≃ ٤,١٣٤ × ٩,٨ ≃ ٤٠,٥ متر / ث^{٢}

أى أن متجه عجلة الجسم موجه فى اتجاه $\overleftarrow{س}$ أى إلى أعلى المستوى .

تمارين (١ – ٤)

(١) شخص كتلته ٦٠ كجم موجود داخل مصعد ، عين رد فعل المصعد على هذا الشخص بوحدة النيوتن فى كل من الحالات الآتية :

أولا : إذا كان المصعد ساكنا .

ثانيا : إذا تحرك المصعد بعجلة منتظمة مقدارها ١,٧ متر/ ث^{٢} موجهة رأسيًا إلى أعلى.

ثالثا : إذا تحرك المصعد بعجلة منتظمة مقدارها ٢,٨ متر/ ث^{٢} موجهة رأسيًا إلى أسفل.

(٢) وضع جسم كتلته ٢ كجم على أرض مصعد . أوجد مقدار قوة ضغط هذا الجسم على أرض المصعد عندما يكون الأخير .

أ) متحركا بسرعة منتظمة .

ب) متحركا لأعلى بعجلة مقدارها ٩٨ سم / ث^{٢} .

جـ) متحركا لأسفل بعجلة مقدارها ٩٨ سم / ث^{٢} .

(٣) مصعد كهربائى يصعد بعجلة قدرها ٧٠ سم / ث^{٢} به رجل ضغط رجله على أرض المصعد يساوى ٧٦,٥ ثقل كجم . أحسب كتلة الرجل .

(٤) علق جسم كتلته ١ كجم من نهاية ميزان زمبركى مثبت فى سقف مصعد تحرك المصعد بعجلة منتظمة فأعطى الميزان قراءة ٨٠٠ ث . جم . أوجد اتجاه عجلة المصعد ومقدارها .

(٥) يتحرك مصعد رأسيًا وبه ميزان زمبركى معلق فيه جسم كتلته ٤٩٠ جم وجد أن قراءة الميزان ٤٥٠ ث . جم . فهل كان المصعد صاعدا أم هابطا ؟ وما مقدار عجلة حركته .

(٦) علق جسم فى ميزان زنبركى فى سقف مصعد فسجل الميزان القراءة ١٦ ث . كجم عندما كان المصعد صاعدا بعجلة مقدارها جـ سم / ث^{٢} وسجل القراءة ١٧ ث . كجم عندما كان المصعد صاعدا بالعجلة $\frac{٣}{٢}$ جـ . أوجد كتلة الجسم ومقدار جـ . أحسب أيضا قراءة الميزان عندما يكون المصعد هابطا بتقصير منتظم قدره $\frac{٣}{٢}$ جـ .

(٧) علق جسم فى نهاية ميزان زنبركى مثبت فى سقف مصعد ثم أخذت قراءة الميزان فى حالتى أن يكون المصعد متحركا لأعلى بعجلة ما ثم لأسفل بنفس مقدار العجلة السابقة فكانت القراءتان كالآتى : ٢٢ , ١ كجم ، ٧٨ , ٠ ث . كجم على الترتيب عين كتلة الجسم وكذلك مقدار عجلة المصعد .

(٨) وضع جسم كتلته $\frac{١}{٢}$ كجم على مستو أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ثم ترك ليتحرك ، أوجد مقدار قوة رد فعل المستوى عليه ، وكذلك مقدار عجلته على المستوى .

(٩) وضع جسم كتلته ١ كجم على مستو أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ثم أثر عليه بقوة مقدارها ١٠ نيوتن تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى . أوجد مقدار قودة رد فعل المستوى على الجسم وعجلته .

(١٠) يتحرك جسم كتلته ٢ كجم على خط أكبر ميل لمستو أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° تحت تأثير قوة مقدارها ١ ث . كجم موجهة نحو المستوى وتصنع مع الأفقى زاوية قياسها ٣٠° لأعلى ، أوجد مقدار قوة رد فعل المستوى على الجسم وكذلك عجلته .

(١١) قذف جسم إلى أعلى مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها ١ , ٠ وفى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى وبسرعة مقدارها ٤٩ سم / ث . أوجد الزمن الذى يمضى حتى يعود الجسم إلى النقطة التى قذف منها .

(١٢) جسم كتلته ٥٠٠ جم موضوع على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٣}{٥}$ أثرت عليه قوة تعادل ٥٠٠ ث . جم إلى أعلى المستوى وفى اتجاه خط أكبر ميل . أوجد عجلة الحركة ، وإذا انعدم تأثير القوة بعد مضى ثانيتين . أوجد المسافة التى يصعدها الجسم بعد ذلك حتى يسكن لحظيا .

(١٣) تحركت سيارة معطلة مبتدئة من السكون أسفل مستوى يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ فصارت سرعتها ٤٤,١ كم / ساعة بعد ٢٥٠ ثانية . أحسب المقاومة عن كل طن من كتلة السيارة .

(١٤) قطار كتلة ٢٤٠ طنا يسير فى طريق أفقى بعجلة منتظمة ٢,٤٥ سم / ث^{٢} فأذا كانت قوة آلاته تعادل ٢٠٠٠ ث . كجم فما مقدار المقاومة لكل طن من كتلة القطار .

وإذا صعد هذا القطار أعلى منحدر يميل على الأفق بزاوية هـ حيث جا هـ = $\frac{١}{٥٠٠}$ فما العجلة التى يتحرك بها القطار أعلى . المنحدر علما بأن المقاومة لم تتغير ؟

(١٥) مستوى مائل خشن طوله ٤٠ مترا وارتفاعه ١٠ أمتار . أوجد أصغر سرعة يقذف بها جسم من أسفل نقطة فى المستوى المائل وفى اتجاه خط أكبر ميل فيه لكى يصل بالكاد إلى أعلى نقطة فيه ، علما بأن الجسم يلاقى مقاومات تعادل $\frac{١}{٤}$ وزنه .

الفصل الثانى

تطبيقات قوانين نيوتن - الحركة على مستوى خشن

- **مقدمـــة :**

نتناول فى هذا الفصل بعض التطبيقات على قوانين نيوتن للحركة .

- **الأهداف :**

فى نهاية تدريس هذا الفصل ينبغى أن يكون الطالب قادراً على :

١ – إيجاد عجلة حركة جسمان متصلان بطرفى خيط يمر على بكرة ملساء وأيضا إيجاد قيمة الشد فى الخيط والضغط على محور البكرة .

٢ – إيجاد عجلة حركة جسمان متصلان بطرفى خيط يمر على بكرة ملساء عند حافة نضد أفقى أملس يتحرك أحدهما على النضد و الآخر يتدلى رأسياً وأيضا إيجاد قيمة الشد فى الخيط والضغط على محور البكرة.

٣ – إيجاد عجلة حركة جسمان متصلان بطرفى خيط يمر على بكرة ملساء عند قمة مستوى مائل املس أحدهما على المستوى المائل الآخر يتحرك رأسياً وأيضا إيجاد قيمة الشد فى الخيط والضغط على محور البكرة .

٤ – يتعرف على حركة جسمان يتصلان بخيط يمر على بكرة ملساء عند حافة نضد افقى خشن يتحرك أحدهما على النضد و الآخر يتدلى رأسياً وأيضا إيجاد قيمة الشد فى الخيط والضغط على محور البكرة .

٥ – إيجاد عجلة حركة جسمان متصلان بطرفى خيط يمر على بكرة ملساء عند قمة مستوى مائل خشن أحدهما على المستوى المائل و الآخر يتحرك رأسياً وأيضا إيجاد قيمة الشد فى الخيط والضغط على محور البكرة .

- الموضوعات :

١– حركة مجموعة مكونة من جسمين يتدليان رأسيا من طرفى خيط يمر على بكرة ملساء

٢– حركة مجموعة مكونة من جسمين متصلان بخيط أحدهما يتحرك على مستوى أفقى أملس والآخر يتحرك رأسيا .

٣– حركة مجموعة مكونة من جسمين متصلان بطرفى خيط أحدهما يتحرك على مستوى مائل أملس والآخر يتحرك رأسيا

٤– حركة مجموعة مكونة من جسمين متصلان بطرفى خيط أحدهما يتحرك على نضد أفقى خشن والآخر يتدلى رأسيا

٥– حركة مجموعة مكونة من جسمين متصلان بطرفى خيط أحدهما يتحرك على مستوى مائل خشن والآخر يتدلى رأسيا

تطبيقات قوانين نيوتن

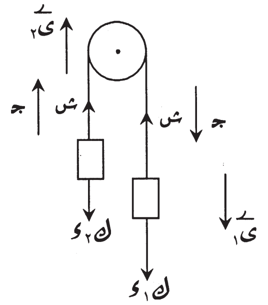
نعطى فى هذا الفصل بعض التطبيقات على قوانين نيوتن للحركة تتعلق بحركة جسمين يتصلان معاً بواسطة خيوط ، وسنفرض فيما يلى أن هذه الخيوط ثابتة و مهملة الوزن بالنسبة لأوزان الأجسام المتحركة بحيث يمكن إهمال أوزانها .

التطبيق الأول :

حركة مجموعة مكونة من جسمين يتدليان رأسيا من طرفى خيط يمر على بكرة ملساء .

نعتبر جسمين كتلتاهما ك١ ، ك٢ حيث ك١ > ك٢

ويتصلان معاً بواسطة خيط يمر فوق بكرة ملساء و سنعتبر البكرة صغيرة بدرجة كافية تسمح بإهمال طول جزء الخيط الذى يمر فوقها بالنسبة لطوله الكلى .



شكل رقم (١)

و سنفرض أن جزئى الخيط رأسيان كما يوضح شكل (١) و أن المجموعة تركت لتتحرك ، فماذا تكون الحركة الناتجة ؟ لدراسة هذه المسألة نعتبر حركة كل من الجسمين على حدة .

و حيث أن ك١ > ك٢ فإن الجسم الذى كتلته ك١ يهبط رأسياً إلى أسفل بينما الجسم الذى كتلته ك٢ يصعد رأسياً إلى أعلى و نعتبر متجه و حدة ى١ موجها رأسيا إلى أسفل بالنسبة لحركة الجسم الذى كتلته ك١ و متجه ى٢ موجها رأسيا إلى أعلى بالنسبة لحركة الجسم الذى كتلته ك٢ و نفرض أن جـ القياس الجبرى لمتجه عجلة الجسم الذى كتلته ك١ بالنسبة للمتجه ى١ ، بما أن الخيط ثابت الطول فإن جـ تكون هى أيضاً القياس الجبرى لمتجه عجلة الجسم الذى كتلته ك٢ بالنسبة للمتجه ى٢ .

معادلة حركة الجسم الذى كتلته ك١ :

ك١ جـ = ك١ د − ش (١)

معادلة حركة الجسم الذى كتلته $ك_٢$:

$$ك_٢ \, جـ = ش - ك_٢ \, ء \qquad (٢)$$

حيث ش قيمة الشد فى أى من جزئى الخيط ، ء مقدار عجلة الجاذبية وبجمع العلاقتين (١) ، (٢) نجد :

$$(ك_١ + ك_٢) \, جـ = (ك_١ - ك_٢) \, ء$$

و منها نعين قيمة جـ :

$$جـ = \frac{ك_١ - ك_٢}{ك_١ + ك_٢} \times ء \qquad (٣)$$

تبين هذه العلاقة أن الجسم ذات الكتلة الأكبر هو الذى يتحرك رأسياً لأسفل .

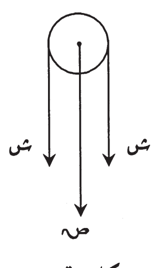
ملاحظـة :

لو أننا فرضنا منذ البداية أن الجسم الذى كتلته $ك_١$ اكتسب عجلة موجهة رأسياً لأعلى لكنا حصلنا علــى قيمــة جـ سالبة . و إذا تساوت الكتلتان فإن المجموعة تظل ساكنة أو يتحرك كل من الجسمين حركة منتظمة بنفس مقدار السرعة

أما الشد فى الخيط فيمكن الحصول عليه من (١) مثلا بعد التعويض عن جـ بالقيمة التى حصلنا عليها .

الضغط على البكرة :

يؤثر الخيط على البكرة بقوتين كل منهما ش موجهتين رأسياً لأسفل كما فى شكل (٢) تمثل محصلة هاتين القوتين قوة الضغط على البكرة و ليكن ض مقدار هذه القوة .



شكل رقم (٢)

$$ض = ٢ \, ش \qquad (٤)$$

ملاحظـة :

إذا كان اتجاه الحركة لكل من الجسمين معلوماً فإنه يمكن إغفال متجهى الوحدة $\overline{ى_١}$ ، $\overline{ى_٢}$ كما يتضح ذلك من

الأمثلة الآتية :

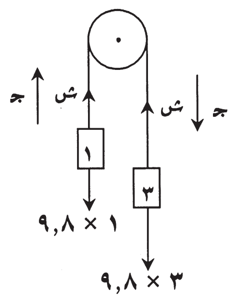
مثال (١) :

جسمان كتلتاهما ١ ، ٣ كجم يتصلان بخيط يمر على بكرة صغيرة ملساء ، بحيث كان جزئى الخيط رأسيين .

عين عجلة المجموعة و الضغط على البكرة .

الحـــل :

نفرض أن الجسم الذى كتلته ٣ كجم اكتـــسب عجلـــة رأسية لأسفل مقدارها جـ . يكتسب الجسم الذى كتلته ١ كجم عجلة رأسية لأعلى مقدارها جـ أيضا كما هو موضح فى شـــكل (٣) مقدار عجلة الجاذبية الأرضية : ء = ٩,٨ متر / ث^{٢}



شكل رقم (٣)

معادلة حركة الجسم الذى كتلته ٣ كجم :

٣ جـ = ٣ × ٩,٨ – ش (١)

معادلة حركة الجسم الذى كتلته ١ كجم :

جـ = ش – ٩,٨ (٢)

بجمع (١) ، (٢)

٤ جـ = ١٩,٦

جـ = $\frac{١٩,٦}{٤}$ = ٤,٩ متر / ث^{٢}

نعوض بهذه القيمة فى (١) لحساب الشد فى الخيط

ش = ٣ × ٩,٨ – ٣ × ٤,٩

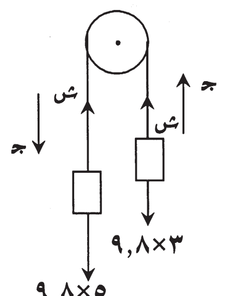
= ١٤,٧ نيوتن

أما مقدار الضغط على البكرة فيساوى ضعف قيمة الشد :

ض = ٢ ش = ٢٩,٤ نيوتن

مثـــال (٢) :

ربط جسمان كتلتاهما ٥ كجم ، ٣ كجم فى نهايتى خيط يمر فوق بكرة صغيرة ملساء و حفظـــت المجموعـــة فى حالة اتزان و جزءا الخيط رأسيين إذا تركت المجموعة لتتحرك ، أوجد مقدار عجلتها و الضغط على البكـــرة عـــين كذلك سرعة الجسم الذى كتلته ٥ كجم عندما يكون قد هبط مسافة ٤٠سم .



شكل رقم (٤)

الحـل :

نعرف أن الجسم ذات الكتلة الكبرى يتحرك رأسياً لأسفل وليكن مقدار عجلته جـ شكل (٤) و مقدار عجلة الجاذبية الأرضية ء = ٩,٨ متر/ث^{٢}

معادلة حركة الجسم الذى كتلته ٥ كجم :

٥ جـ = ٥ × ٩,٨ – ش (١)

معادلة حركة الجسم الذى كتلته ٣ كجم :

٣ جـ = ش – ٣ × ٩,٨ (٢)

بجمع (١) ، (٢)

٨ جـ = ٢ × ٩,٨

جـ = ٢,٤٥ متر / ث^{٢}

تعين الشد فى الحبل من (١)

ش = ٥ × ٩,٨ – ٥ × ٢,٤٥ = ٣٦,٧٥ نيوتن .

و يكون مقدار الضغط على البكرة .

ض = ٢ ش = ٧٣,٥ نيوتن .

إذا كان ع مقدار سرعة الجسم ذات الكتلة الكبرى بعد قطع مسافة ٤٠سم فإن :

ع^{٢} = ٢ × ٢,٤٥ × ٠,٤ = ١,٩٦

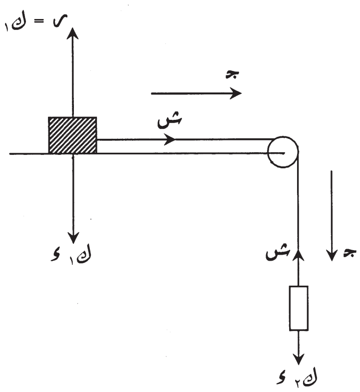
ع = ١,٤ متر / ث

التطبيق الثانى :

حركة مجموعة مكونة من جسمين يتحرك أحدهما على نضد أفقى أملس والآخر رأسياً

نعتبر جسمين كتلتاهما ك١ ، ك٢ يتصلان معاً بواسطة خيط وضع الجسم الذى كتلته ك١ على نضد أفقى أملس و مر الخيط فوق بكرة صغيرة ملساء عند حافة النضد و تدلى الجسم الذى كتلته ك٢ رأسياً أسفل البكرة كما يبين شكل (٥)

إذا فرض أن جزء الخيط المار فوق النضد يوازيه و يكون عمودياً على حافته و تركت المجموعة لتتحرك . فماذا تكون الحركة الناتجة .



شكل رقم (٥)

لدراسة هذه المسألة نعتبر حركة كل من الجسمين على حدة فى المستوى الرأسى المار بالبكرة و بالجسمين فى وضعهما الابتدائى .

حركة الجسم الذى كتلته ك١ :

تؤثر على هذا الجسم ثلاثة قوى هى :

- قوة الوزن و مقدارها ك١ ء و تعمل رأسياً لأسفل حيث ء مقدار عجلة الجاذبية الأرضية الثابتة .
- قوة رد فعل النضد و تعمل رأسياً لأعلى لأن النضد أملس . و ليكن ر مقدار هذه القوة .
- قوة الشد فى الجزء الأفقى من الخيط و تعمل نحو البكرة و ليكن مقدارها ش .

بما أن الجسم الذى كتلته $ك_1$ يظل طوال الوقت على النضد ، فيجب أن ينعدم مجموع المركبات الرأسية للقوى المؤثرة عليه .

$$ر = ك_1 \, د \qquad \qquad (1)$$

و هى علاقة تحدد مقدار رد فعل النضد أيضاً ، فالقوة الأفقية الوحيدة المؤثرة على الجسم الذى كتلته $ك_1$ هى قوة الشد $ش$ و بالتالى يكتسب الجسم عجلة فى اتجاه هذه القوة (أى نحو البكرة) و ليكن $ج$ مقدار العجلة الناتجة .

تكتب معادلة حركة الجسم الذى كتلته $ك_1$ على النضد كالآتى :

$$ك_1 \, ج = ش \qquad \qquad (2)$$

حركة الجسم الذى كتلته $ك_2$:

بما أن الخيط يظل مشدوداً طوال الوقت ، فإن الجسم الذى كتلته $ك_2$ المتدلى يتحرك رأسياً لأسفل بعجلة مقدارها $ج$ أيضاً .

القوى المؤثرة على الجسم الذى كتلته $ك_2$:

- قوة الوزن و مقدارها $ك_2 \, د$ و تعمل رأسياً لأسفل .
- قوة الشد فى الجزء الرأسى من الخيط و هى موجهة رأسياً لأعلى و مقدارها $ش$

معادلة حركة الجسم الذى كتلته $ك_2$:

$$ك_2 \, ج = ك_2 \, د - ش \qquad \qquad (3)$$

بجمع (٢) ، (٣) نجد :

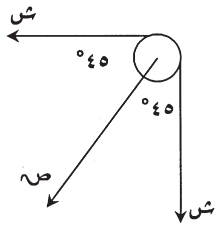
$$(ك_1 + ك_2) \, ج = ك_2 \, د$$

و منها نعين قيمة $ج$

$$ج = \frac{ك_2 \, د}{ك_1 + ك_2} \qquad \qquad (4)$$

أما الشد فى الخيط فيمكن تعيينه من (٢) بعد التعويض عن $ج$ بالقيمة التى حصلنا عليها .

الضغط على البكرة :



شكل رقم (٦)

يؤثر الخيط على البكرة بقوتين مقدار كل منهما ش وموجهتين إحداهما نحو الجسم الذى كتلته ك١ و الآخر نحو الجسم الذى كتلته ك٢ ، و تمثل محصلة هاتين القوتين قوة الضغط على البكرة و ليكن مقدارها ص .

بما أن قوتى الشد المؤثرتين على البكرة متساويتان مقداراً . فإن قوة الضغط على البكرة تنصف الزاوية المحصورة بينهما ، أى أنها تميل على الرأسى لأسفل بزاوية قياسها ٤٥° .

أما مقدار قوة الضغط فيتعين من العلاقة :

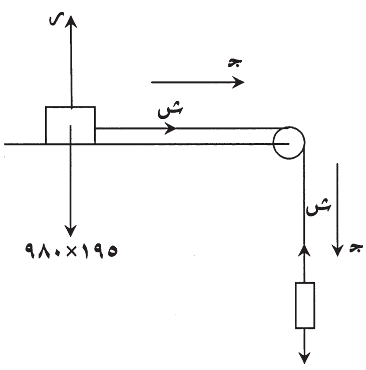
$$ص = ٢ \text{ ش جتا } \frac{٩٠°}{٢} = ٢ \text{ ش جتا } ٤٥°$$

$$ص = \sqrt{٢} \text{ ش} \qquad (٥)$$

مثـال (١) :

وضع جسم كتلته ١٩٥ جم على نضد أفقى أملس و ربط فى أحد طرفى خيط مهمل الوزن يمر فوق بكرة صغيرة ملساء عند حافة النضد و يتدلى من طرفه الآخر جسم كتلته ٥٠ جم . تركت المجموعة لتتحرك من سكون عندما كان الجسم الأول على بعد ١٠٠سم من البكرة . عين مقدار سرعة المجموعة عندما يصل هذا الجسم إلى البكرة و كذلك مقدار الضغط على البكرة .

الحـل :



شكل رقم (٧)

ليكن جـ مقدار عجلة المجموعة ء مقدار عجلة الجاذبية الأرضية :

$ء = ٩٨٠$ سم / ث^{٢}

معادلة حركة الجسم الذى كتلته ١٩٥ جم :

$$١٩٥ \text{ جـ} = \text{ش} \qquad (١)$$

معادلة حركة الجسم الذى كتلته ٥٠ جم :

$$٥٠ \text{ جـ} = ٥٠ \times ٩٨٠ - \text{ش} \qquad (٢)$$

بجمع (١) ، (٢)

$٢٤٥ جـ = ٥٠ \times ٩٨٠$

جـ = ٢٠٠ سم / ث^{٢}

لنفرض أن ع هو مقدار سرعة الجسم الموضوع على النضد لحظة وصوله إلى البكرة

ع^{٢} = $٢ \times ٢٠٠ \times ١٠٠ = ٤٠٠٠٠$

ع = ٢٠٠ سم / ث

لحساب الضغط على البكرة نعين أولاً الشد فى الخيط من (١) بالتعويض عن جـ بالقيمة التى حصلنا عليها .

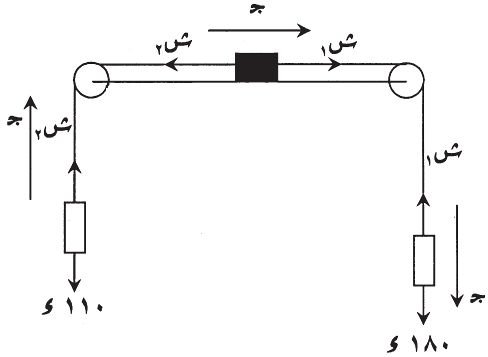
ش = $١٩٥ \times ٢٠٠ = ٣٩٠٠٠$ داين

الضغط على البكرة :

ض = $\sqrt{٢}$ ش = $٣٩٠٠٠\sqrt{٢}$ داين

<u>مثال (٢) :</u>

وضع جسم كتلته ٢٠٠ جم على نضد أفقى أملس و ربط بخيطين من نقطتين متقابلتين فيه ثم مر كل من الخيطين على بكرة صغيرة ملساء و البكرتان مثبتتان فى حافتى النضد و تدلت من الخيط الأول جسم كتلته ١٨٠جم ومن الخيط الثانى جسم كتلته ١١٠ جم ، إذا وقع الجسم الموضوع على النضد و البكرتان على خط مستقيم واحد عمودى على حافتى النضد و تركت المجموعة لتتحرك من سكون ، عين مقدار عجلتها و الضغط على كل من البكرتين .



<u>الحل :</u>

من المرجح هنا أن يتحرك الجسم الذى كتلته ١٨٠جم رأسياً لأسفل لذلك سنعتبر أن عجلته موجهة رأسياً لأسفل و ليكن مقدارها جـ . بما أن الخيطين مشدودان طوال الوقت ، يكتسب الجسمان الآخران عجلتين مقدار كل منهما جـ و فى الاتجاهين الموضحين فى شكل (٨) .

نفرض أن $ش_1$ ، $ش_2$ مقدار الشد فى الخيطين ، مقدار عجلة الجاذبية الأرضية $ء = ٩٨٠$ سم /ث^2

معادلة حركة الجسم الذى كتلته ٢٠٠ جم الموضوع على النضد :

$$٢٠٠ \text{ ج} = ش_1 - ش_2 \qquad (١)$$

معادلة حركة الجسم الذى كتلته ١٨٠ جم :

$$١٨٠ \text{ ج} = ١٨٠ \times ٩٨٠ - ش_1 \qquad (٢)$$

معادلة حركة الجسم الذى كتلته ١١٠ جم :

$$١١٠ \text{ ج} = ش_2 - ١١٠ \times ٩٨٠ \qquad (٣)$$

بجمع المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) ، نجد

$$(٢٠٠ + ١٨٠ + ١١٠) \text{ ج} = (١٨٠ - ١١٠) \times ٩٨٠$$

$$\text{ج} = \frac{١٨٠ - ١١٠}{٢٠٠ + ١٨٠ + ١١٠} \times ٩٨٠ = ١٤٠ \text{ سم / ث}^2$$

بما أن ج > ٠ ، يتأكد لنا أن الجسم المتدلى ذات الكتلة الكبرى هو الذى يتحرك رأسياً لأسفل . لحساب الضغط على كل من البكرتين يجب أولاً تعيين قيمتى الشدين فى الخيطين من العلاقتين (٢) ، (٣) بعد التعويض فيهما عن قيمة ج التى حصلنا عليها .

$$ش_1 = ١٨٠ (٩٨٠ - \text{ج}) = ١٨٠ (٩٨٠ - ١٤٠) = ١٥١٢٠٠ \text{ داين}$$

$$ش_2 = ١١٠ (٩٨٠ + \text{ج}) = ١١٠ (٩٨٠ + ١٤٠) = ١٢٣٢٠٠ \text{ داين}$$

الضغط على البكرة الأولى :

$$ض_1 = \sqrt{٢} \; ش_1 = ١٥١٢٠٠ \sqrt{٢} \text{ داين}$$

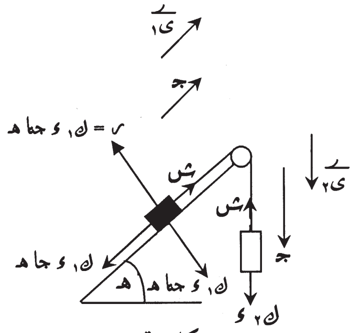
الضغط على البكرة الثانية :

$$ض_2 = \sqrt{٢} \; ش_2 = ١٢٣٢٠٠ \sqrt{٢} \text{ داين}$$

التطبيق الثالث :

حركة مجموعة مكونة من جسمين أحدهما يتحرك على مستوى مائل أملس والآخر يتحرك رأسياً :

نعتبر جسمين كتلتاهما ك١ ، ك٢ يتصلان معاً بواسطة خيط ، وضع الجسم الذى كتلته ك١ على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ و مر الخيط فوق بكرة صغيرة ملساء عند قمة المستوى و تدلى الجسم الذى كتلته ك٢ رأسياً أسفل البكرة كما فى شكل (٩) .



شكل رقم (٩)

بفرض أن جزء الخيط المار على المستوى يوازيه و تركت المجموعة تتحرك من سكون ، فماذا تكون الحركة الناتجة ؟

نحن لا نعرف اتجاه حركة المجموعة مسبقاً . لذلك نعتبر متجهى وحدة ى١ ، ى٢ أولهما يوازى خط أكبر ميل للمستوى (و ليكن موجها لأعلى) و ثانيهما رأسى (و ليكن موجهاً رأسياً لأسفل) و نفرض أن جـ هو القياس الجبرى لمتجه عجلة الجسم الذى كتلته ك١ بالنسبة للمتجه ى١ و بما أن الخيط يظل مشدودا ، فإن جـ هو أيضاً القياس الجبرى لمتجه عجلة الجسم الذى كتلته ك٢ بالنسبة للمتجه ى٢ و يتفق ذلك مع الآتى :

إذا تحرك الجسم الذى كتلته ك١ لأعلى المستوى فإن الجسم الذى كتلته ك٢ يتحرك رأسياً لأسفل (جـ > ٠)

و إذا تحرك الجسم الذى كتلته ك١ لأسفل المستوى فإن الجسم الذى كتلته ك٢ يتحرك رأسياً لأعلى (جـ < ٠) .

حركة الجسم الذى كتلته ك١ :

تؤثر على هذا الجسم ثلاث قوى هى :

- قوة الوزن مقدارها ك١ ء و تعمل رأسياً لأسفل و سنحلل هذه القوة إلى مركبتين إحداهما تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى و موجهة لأسفل و مقدارها ك١ ء جا هـ و الأخرى عمودية على المستوى و موجهة نحوه و مقدارها ك١ ء جتا هـ .

– قوة رد فعل النضد و تكون عمودية على المستوى و موجهة بعيداً عنه و ليكن ر مقدار هذه القوة .

– قوة الشد فى الخيط و تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى و موجهة لأعلى ليكن ش مقدار هذه القوة . بما أن الجسم الذى كتلته $ك_1$ يظل طوال الوقت على المستوى المائل فيجب أن ينعدم مجموع مركبات القوى المؤثرة عليها عمودياً على المستوى .

$$ر - ك_1 \, ء \, جتا \, هـ = ٠ \qquad (١)$$

و هى علاقة تحدد مقدار قوة رد فعل المستوى .

معادلة حركة الجسم الذى كتلته $ك_1$ على المستوى :

$$ك_1 \, جـ = ش - ك_1 \, ء \, جا \, هـ \qquad (٢)$$

حركة الجسم الذى كتلته $ك_2$:

– تؤثر على هذا الجسم قوتان هما .

– قوة الوزن و تعمل رأسا لأسفل و مقدارها $ك_2$ ء .

– قوة الشد فى الخيط و تعمل رأسياً لأعلى و مقدارها ش .

معادلة حركة الجسم الذى كتلته $ك_2$:

$$ك_2 \, جـ = ك_2 \, ء - ش \qquad (٣)$$

بجمع (٢) ، (٣) نجد

$$(ك_1 + ك_2) \, جـ = (ك_2 - ك_1 \, جا \, هـ) \, ء$$

و منها نحصل على قيمة جـ

$$جـ = \frac{ك_2 - ك_1 \, جا \, هـ}{ك_1 + ك_2} \, ء \qquad (٤)$$

يمكن الآن تعيين الشد فى الخيط من (٣) بعد التعويض عن جـ بالقيمة التى حصلنا عليها .

(أولاً) إذا كان $ك_٢ > ك_١$ جا هـ فإن جـ > ٠

و يتحرك الجسم الذى كتلته $ك_٢$ رأسيا لأسفل بينما يتحرك الجسم الذى كتلته $ك_١$ لأعلى المستوى .

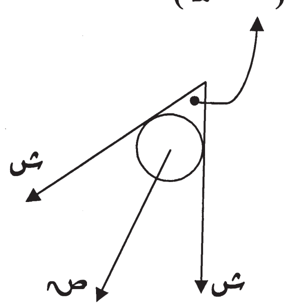
(ثانياً) إذا كان $ك_٢ = ك_١$ جا هـ فإن جـ = ٠

و تظل المجموعة ساكنة (أو يتحرك كل من الجسمين حركة منتظمة بنفس مقدار السرعة)

(ثالثاً) إذا كان $ك_٢ < ك_١$ جا هـ فإن جـ < ٠

و يتحرك الجسم الذى كتلته $ك_٢$ رأسياً لأعلى ، بينما يتحرك الجسم الذى كتلته $ك_١$ لأسفل المستوى .

الضغط على البكرة :



شكل رقم (١٠)

يؤثر الخيط على البكرة بقوتين مقدار كل منهما ش ، الأولى تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى و تعمل لأسفل ، و الثانية تعمل رأسياً لأسفل .

و تمثل محصلة هاتين القوتين قوة الضغط على البكرة ليكن ض مقدار هذه القوة .

بما أن قوتى الشد المؤثرتين على البكرة متساويتان مقداراً و تحصران عند البكرة زاوية قياسها (٩٠° − هـ) .

فإن قوة الضغط على البكرة تنصف هذه الزاوية ، أى أنها تميل على الرأسى لأسفل بزاوية قياسها ($٤٥° - \frac{هـ}{٢}$) .

أما مقدار قوة الضغط فيعطى من العلاقة .

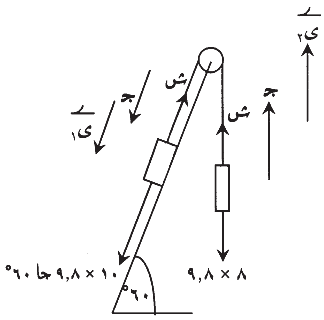
$$ض = ٢ \, ش \, جتا \left(٤٥° - \frac{هـ}{٢} \right) \qquad (٥)$$

مثـــال (١) :

وضع جسم كتلته ١٠ كجم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° ربط هذا الجسم ، بأحد طرفى خيط يمر فوق بكرة صغيرة ملساء عند قمة المستوى و يتدلى من طرفه الآخر جسم كتلته ٨ كجم . إذا تحركت المجموعة من سكون ، أثبت أن كلاً من الجسمين يتحركان بعجلة مقدارها ٠,٣٦ متر/ث^{٢} تقريباً و أن الجسم ذات الكتلة الصغرى يتحرك لأعلى . عين مقدار الضغط على البكرة .

الحـــل :

نختار متجه وحدة $\overset{\rightharpoonup}{ى_١}$ يوازى خط أكبر ميل للمستوى و موجه لأسفل ، $\overset{\rightharpoonup}{ى_٢}$ متجه وحدة موجه رأسياً لأعلى و ليكن جـ القياس الجبرى لمتجه عجلة الجسم الذى كتلته ١٠ كجم بالنسبة للمتجه $\overset{\rightharpoonup}{ى_١}$ و هو أيضاً القياس الجبرى لمتجه عجلة الجسم الذى كتلته ٨ كجم بالنسبة للمتجه $\overset{\rightharpoonup}{ى_٢}$ كما يبين شكل (١١) .



شكل رقم (١١)

مقدار عجلة الجاذبية الأرضية ء = ٩,٨ متر / ث^{٢} .

معادلة حركة الجسم الذى كتلته ١٠ كجم على المستوى

$$١٠ \text{ جـ} = ١٠ \times ٩,٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \text{ش} \qquad (١)$$

معادلة حركة الجسم الذى كتلته ٨ كجم

$$٨ \text{ جـ} = \text{ش} - ٨ \times ٩,٨ \qquad (٢)$$

بجمع (١) ، (٢) نحصل على قيمة جـ :

$$١٨ \text{ جـ} = ١٠ \times ٩,٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - ٨ \times ٩,٨$$

$$\text{جـ} \simeq ٠,٣٦ \text{ متر / ث}^{٢}$$

و هى قيمة موجبة مما يعنى أن اتجاهى عجلتى الجسمين كما هو موضح بالشكل ، إذن فالجسم الذى كتلته ٨ كجم يتحرك رأسياً لأعلى .

بالتعويض بهذه القيمة فى المعادلة (٢) تحصل على قيمة الشد فى الخيط :

$$٨ \times ٠,٣٦ \simeq \text{ش} - ٨ \times ٩,٨$$

ش ≃ ٨ × ٠,٣٦ + ٨ × ٨ × ٩,٨

≃ ٨١,٢٨ نيوتن

أما الضغط على البكرة فيميل على الرأسى لأسفل بزاوية قياسها (٤٥° − ٣٠°) = ١٥° و يحسب مقداره من العلاقة .

ض ≃ ٢ × ٨١,٢٨ × جتا ١٥°

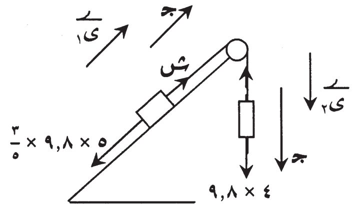
≃ ١٥٧ نيوتن

مثـــال (٢) :

ربط جسمان كتلتاهما ٥ كجم ، ٤ كجم فى طرفى خيط ، وضع الجسم الذى كتلته ٥ كجم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٣}{٤}$ و مر الخيط على بكرة صغيرة ملساء عند قمة المستوى بحيث يتدلى الجسم الآخر رأسياً أسفل البكرة .

فإذا تركت المجموعة لتتحرك ، أوجد مقدار عجلتها و كذلك الشد فى الخيط ، و إذا قطع الخيط بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة فأوجد المسافة التى يصعدها الجسم الذى كتلته ٥ كجم على المستوى منذ لحظة قطع الخيط و حتى يسكن لحظياً .

الحـــل :



شكل رقم (١٢)

نأخذ متجه وحدة $\vec{ى}_1$ يوازى خط أكبر ميل للمستوى المائل و موجه لأعلى و متجه وحدة $\vec{ى}_2$ رأسياً لأسفل و نفرض أن جـ هو القياس الجبرى لمتجهى عجلة الجسمين بالنسبة للمتجهين $\vec{ى}_1$ ، $\vec{ى}_2$ على الترتيب :

مقدار عجلة الجاذبية الأرضية : ء = ٩,٨ متر / ث^{٢}

معادلة حركة الجسم الذى كتلته ٥ كجم :

$$٥ \, جـ = ش - ٥ \times ٩,٨ \times \frac{٣}{٥} \qquad (١)$$

معادلة حركة الجسم الذى كتلته ٤ كجم :

$$٤ \, جـ = ٤ \times ٩,٨ - ش \qquad (٢)$$

بجمع (١) ، (٢) نجد

$$٩ \, جـ = ٩,٨ \qquad جـ = \frac{٤٩}{٤٥} \text{ متر / ث}^٢$$

بما يعنى أن الجسم الذى كتلته ٥ كجم يتحرك لأعلى المستوى بينما يتحرك الجسم الذى كتلته ٤ كجم رأسياً لأسفل . نعوض بقيمة جـ التى حصلنا عليها فى (٢) فنحصل على الشد فى الخيط :

$$٤ \times \frac{٤٩}{٤٥} = ٤ \times ٩,٨ - ش$$

$$ش = ٤ \times ٩,٨ - \frac{٤ \times ٤٩}{٤٥} = \frac{١٥٦٨}{٤٥} \text{ نيوتن}$$

بعد مرور ثانية واحدة على بدء الحركة كانت سرعة الكتلة الموضوعة على المستوى :

$$ع_١ = جـ \times ١ = \frac{٤٩}{٤٥} \text{ متر / ث}$$

إذا قطع الخيط ، يصبح الجسم الذى كتلته ٥ كجم متحرك تحت تأثير مركبة وزنه الموازية لخط أكبر ميل والموجهة لأسفل ، فيتحرك حركة تقصيرية بعجلة يعطى قياسها الجبرى $جـ_١$ بالنسبة لمتجه الوحدة $\overleftarrow{ى_١}$ من العلاقة .

$$جـ_١ = - ٩,٨ \times \frac{٣}{٥} \text{ متر / ث}^٢$$

$$جـ_١ = - ٥,٨٨ \text{ متر / ث}^٢$$

حتى يتوقف الجسم لحظياً و تحسب المسافة المقطوعة خلال هذه الحركة من العلاقة

$$ع_١^٢ - ع_{٠}^٢ = ٢ \, جـ_١ \, ف \quad \text{حيث } ع_١ = \text{صفر} ، ع_{٠} = \frac{٤٩}{٤٥} \text{ متر / ث}$$

$$- \left(\frac{٤٩}{٤٥}\right)^٢ = ٢ \times - ٥,٨٨ \, ف$$

$$ف = \frac{٤٩}{٤٨٦} \text{ متر} \simeq ٠,١ \text{ متر} \quad \text{أو} \quad ف \simeq ١٠ \text{ سم}$$

تمـــارين (٢ – ١)

١- يمر خيط فوق بكرة صغيرة ملساء و يتدلى من طرفيه جسمان كتلتاهما $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{5}$ كجم ، عين عجلة المجموعـة و الضغط على البكرة .

٢- علق جسمان كتلتاهما ١٢٥ ، ١٢٠ جم على الترتيب من طرفى خيط يمر على بكرة صغيرة ملساء ، عـين عجلة المجموعة و الضغط على البكرة و إذا بدأت المجموعة الحركة من سكون و الجسمان فى مستوى أفقـى واحد ، فما هى المسافة الرأسية بينهما بعد مرور ثانية من بدء الحركة ؟

٣- ربط جسمان كتلتاهما ٤,١ ، ٤ كجم فى نهايتى خيط طوله ١٥٠ سم يمر على بكرة صغيرة ملساء بحيـث كان جزءا الخيط رأسيين . أثبت أن مقدار العجلة الناشئة يساوى ١٢ سم / $ث^2$ تقريباً .

و إذا بدأت الحركة من سكون عندما كانت الكتلة الكبرى عند البكرة ، فما هى سرعتها عنـدما تـصل الكتلة الصغرى إلى البكرة ؟

٤- يمر خيط على بكرة ملساء و يتدلى من أحد طرفيه جسم كتلته ٤ كجم و من الطرف الآخر جسمان كتلـة أحدهما ٣ كجم و الثانى ٢ كجم . و إذا تحركت المجموعة من سكون ، أوجد عجلتـها و سـرعة الكتلـة ٤ كجم بعد مرور ٣ ثوان من بداية الحركة . و إذا فصلت الكتلة ٢ كجم عن المجموعة عند هذه اللحظـة ، أثبت أن الكتلة تسكن لحظياً بعد مرور $\frac{٧}{٣}$ ثانية من لحظة الفصل .

٥- يمر خيط على بكرة صغيرة ملساء و يتدلى من أحد طرفيه جسم كتلته ٤ كجم و من الطرف الثانى جـسم كتلته ١٠ كجم . أوجد عجلة المجموعة و الضغط على البكرة و إذا انفصل خمسا الكتلـة الكـبرى عـن المجموعة ، أثبت أن قيمة الضغط على البكرة تصبح $\frac{٨٤}{١٠٠}$ من قيمتها الأولى .

٦- ربط جسمان كتلتاهما ٢٠ ، ٩٦٠ جم على الترتيب فى نهايتى خيط . وضع الجسم الأول علـى مـستوى أفقى أملس و مر الخيط على بكرة صغيرة ملساء و تدلى الجسم الثانى رأسياً أسفلها بحيث كان الجزء الأفقى من الخيط عمودياً على حافة النضد . أوجد عجلة المجموعة ثم عين الشد فى الخيط و الضغط على البكرة .

٧- وضع جسم كتلته ٣ كجم على نضد أفقى أملس وربط بخيط يمر فوق بكرة صغيرة ملساء عند حافة النضد و تدلى من الطرف الآخر للخيط جسم كتلته ٠,٦٧٥ كجم بحيث كان الجزء الأفقى من الخيط عمودياً على حافة النضد أوجد مقدار عجلة المجموعة و إذا بدأت المجموعة حركتها من سكون عندما كانت الكتلة الكبرى على بعد ٢٥٠ سم من البكرة ، أوجد سرعة هذه الكتلة عندما تكون على وشك الاصطدام بالبكرة .

٨- وضع جسم كتلته ١٠٠ جم على نضد أفقى أملس و ربط من نقطتين فيه بخيطين يمر كل منهما على بكرة صغيرة ملساء و البكرتان عند حافتى النضد بحيث كان الجسم و البكرتان على خط مستقيم واحد عمودى على الحافتين علق جسمان كتلتاهما ٣٠٠ ، ٣٥٠ جم من الطرفين الحرين للخيطين . أوجد مقدار عجلة المجموعة و الشد فى كل خيط .

٩- وضع جسم كتلته ٥٠٠ جم على نضد أفقى أملس و ربط من نقطتين متقابلتين فيه بخيطين ، أحدهما يمر على بكرة صغيرة ملساء أ عند حافة النضد و تتدلى من طرفه الثانى جسم كتلته ٣٠٠ جم و الآخر يمر على بكرة صغيرة ملساء ب عند الحافة المقابلة للنضد و تتدلى من طرفه الثانى جسم كتلته ٢٠٠ جم وبحيث كانت الكتلة ٥٠٠ جم و البكرتان واقعة على خط مستقيم واحد عمودى على حافتى النضد . تركت المجموعة لتتحرك من سكون عندما كانت الكتلة الموضوعة على النضد على بعد ٢٤٥ سم من البكرة أ وبعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة فصل ثلث الكتلة ٣٠٠ جم . اثبت أن الكتلة ٥٠٠ جم تصطدم بالبكرة أ بعد مرور ثانيتين من لحظة الانفصال .

١٠- ربط جسمان كتلة كل منهما ٢ كجم فى نهايتى خيط ووضع أحد الجسمين على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° و مر الخيط على بكرة صغيرة ملساء تقع عند قمة المستوى بحيث تدلى الجسم الثانى رأسياً أسفلها ، أوجد عجلة المجموعة و الشد فى الخيط و كذلك الضغط على البكرة .

١١- جسمان كتلتاهما ٦٠ جم ، ٢٠ جم يتصلان بنهايتى خيط ، وضع الجسم الأول على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° و مر الخيط على بكرة صغيرة ملساء عند قمة المستوى و تدلى الجسم الثانى رأسياً أسفلها ، أوجد عجلة المجموعة و الشد فى الخيط و الضغط على البكرة .

١٢- ربط جسمان كتلتاهما ٦٠ ، ٤٠ جم فى نهايتى خيط ، وضع الجسم الأول على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° و مر الخيط فوق بكرة صغيرة ملساء عند قمة المستوى و تدلى الجسم الثانى رأسيا أسفلها . أوجد عجلة المجموعة ، و إذا تحركت المجموعة من سكون عندما كان الجسم الموضوع على المستوى على بعد ١٩٦سم من البكرة فمتى يصطدم بها ؟

١٣- ربط جسمان كتلتاهما ٤ ، ٣ كجم فى نهايتى خيط ، وضع الجسم الأول على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° و مر الخيط فوق بكرة صغيرة ملساء عند قمة المستوى و تدلى الجسم الثانى رأسيا أسفلها ، أوجد عجلة المجموعة و الضغط على البكرة ، إذا تحركت المجموعة من سكون و قطع الخيط بعد مرور ٣ ثوان من بداية الحركة ، فما هى المسافة التى تقطعها الكتلة على المستوى منذ لحظة انقطاع الخيط و حتى تسكن لحظياً ؟

١٤- جسمان س ، ص كتلتاهما ١٣٢ ، ١٠٨ من الجرامات على الترتيب مربوطان فى طرفى خيط ، يمر على بكرة ملساء ثم ربط الجسم ص بخيط آخر طوله ٦٠سم و يحمل فى طرفه جسماً (ع) كتلته ٩٠ جم يتدلى رأسياً ، بدأت المجموعة حركتها عندما كانت الكتلة (ع) على ارتفاع ١٢,٥سم من سطح الأرض . اثبت أن الكتلة ص تسكن لحظياً عندما تكون على ارتفاع ٣٥سم من سطح الأرض .

١٥- جسمان أ ، ب كتلة كل منهما ك جم مربوطان فى طرفى خيط يمر على بكرة ملساء و يتدليان رأسياً ، أضيفت كتلة مقدارها ٣٥ جم إلى الجسم أ ، فإذا بدأت المجموعة الحركة من السكون فاثبت أن عجلة المجموعة هى $\frac{٣٥ \, د}{٢ \, ك + ٣٥}$ سم /ث^{٢} حيث د عجلة الجاذبية .

و إذا اصطدم الجسم أ بالأرض بعد أن قطع مسافة ٥٠سم و استمر الجسم ب فى الحركة حتى صار على بعد ٦٠سم من النقطة التى بدأ التحرك منها حيث سكن لحظياً . أوجد قيمة ك .

الحركة على مستوى خشن

درسنا فى تطبيقات قوانين حركة كتلتين متصلتين بخيط عندما تتحرك إحدى الكتلتين (أو كلاهما) على مستوى أملس ، و سوف نبحث الآن حركة المجموعة إذا كان المستوى خشناً .

و فى هذه الحالة ستظهر فى معادلات الحركة قوة جديدة هى قوة الاحتكاك بين الجسم و المستوى و قد عولج موضوع الاحتكاك بالتفصيل فى الجزء الخاص بالاستاتيكا و سنكتفى هنا بذكر القواعد الأساسية التى يجب مراعاتها عند دراسة الحركة على مستوى خشن و هى :

١- قوة الاحتكاك تكون دائماً موجهة ضد اتجاه الحركة .

٢- تتزايد قوة الاحتكاك كلما تزايدت القوة التى تعمل على إحداث الحركة حتى تصل إلى حد لا تتعداه و عند ذلك يكون الجسم على وشك الحركة و يكون الاحتكاك نهائياً .

٣- فى حالة الحركة يكون الاحتكاك نهائياً ، فإذا رمزنا لمعامل الاحتكاك بالرمز م ، و لمقدار رد الفعل العمودى بالرمز ر وللاحتكاك النهائى بالرمز ك فإن :

ك = م ر

مثـال (١) :

وضع جسم كتلته ٣ كجم على نضد أفقى خشن ووصل بخيط أفقى يمر على بكرة ملساء عند حافة النضد و يحمل فى طرفه الآخر كتلة مقدارها ٢ كجم . فإذا كان معامل الاحتكاك بين الجسم و النضد يساوى $\frac{١}{٣}$ فأوجد عجلة المجموعة و المسافة التى تقطعها فى ثانية .

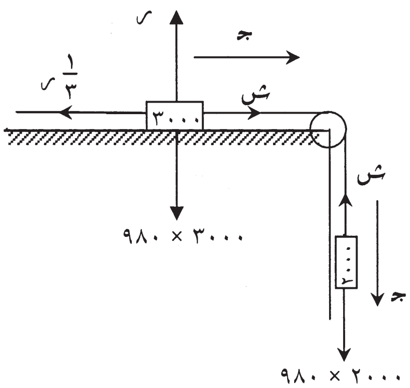
الحـل :

الشكل يبين القوى المؤثرة على كل من الجسمين نفرض أن

مقدار عجلة المجموعة = جـ

حيث الجسم الموضوع على النضد ليست له حركة رأسية .

∴ القوى الرأسية المؤثرة عليه تكون متزنة .



شكل رقم (١٣)

∴ ر = ٣٠٠٠ × ٩٨٠ داين

و حيث أن الجسم الموضوع على النضد يتحرك عليه

فالاحتكاك = الاحتكاك النهائى

ك = م ر = $\frac{١}{٣}$ × ٣٠٠٠ × ٩٨٠ داين

∴ معادلة حركة الجسم الموضوع على النضد هى :

٣٠٠٠ ج = ش − $\frac{١}{٣}$ × ٣٠٠٠ × ٩٨٠ . . . . . (١)

، معادلة حركة الكتلة ٢ كجم هى :

٢٠٠٠ ج = ٢٠٠٠ × ٩٨٠ − ش . . . . . (٢)

، بجمع (١) ، (٢) نجد أن :

٥٠٠٠ ج = ٣٠٠٠ × ٩٨٠ − ١٠٠٠ × ٩٨٠

∴ ج = ١٩٦سم / ث^{٢}

لحساب المسافة المطلوبة نستخدم القانون :

ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ ج ن^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ١٩٦ × ١ = ٩٨ سم

مثـــال (٢) :

فى المثال السابق إذا بدأت المجموعة الحركة عندما كانت الكتلة المتدلية على ارتفاع ٥٠سم من سطح الأرض .

أوجد المسافة التى يتحركها الجسم الموضوع على النضد قبل أن يقف .

الحــل :

نوجد أولا السرعة التى تكتسبها المجموعة عندما تصل الكتلة الرأسية إلى سطح الأرض من القانون :

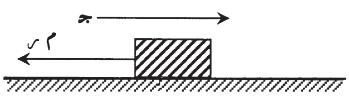
ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ ج ف

∴ ع^{٢} = ٠ + ٢ × ١٩٦ × ٥٠   ∴ ع = ١٤٠سم / ث^{٢}

عندما تصل الكتلة المتدلية إلى سطح الأرض تستقر عليه ، يصبح الجسم الموضوع على النضد فى حركته الأفقية خاضعا لقوة الاحتكاك فقط التى تعمل على إيقافه ، فيتحرك على النضد بعجلة تقصيرية ، و تكون معادلة حركتــه فى هذه الحالة هى :

$$٣٠٠٠ \text{ ج} = \frac{-١}{٣} \times ٣٠٠٠ \times ٩٨٠$$

$$\therefore \text{ ج} = \frac{-٩٨٠}{٣} \text{ سم / ث}^{٢}$$



شكل رقم (١٤)

و لكن السرعة الابتدائية لهذا الجسم = ١٤٠سم / ث

لإيجاد المسافة التى يقطعها حتى يقف نستخدم القانون :

$$\text{ع}^{٢} = \text{ع}_{٠}^{٢} + ٢ \text{ ج ف}$$

$$\therefore ٠ = (١٤٠)^{٢} - ٢ \times \frac{٩٨٠}{٣} \times \text{ف}$$

$$\therefore \text{ف} = ٣٠ \text{سم}$$

مثـــال (٣) :

مستوى مائل خشن طوله ٢٥٠سم و ارتفاعه ١٥٠سم ، وضع عليه جسم فى حالة سكون فانزلق إلى أســفل ، فإذا كان معامل احتكاك المستوى $\frac{١}{٢}$ فأوجد العجلة التى يتزلق بها الجسم أسفل المستوى و ســرعته عنــدما يقطــع مسافة ٢٠٠سم على المستوى .

و إذا قذف الجسم من أسفل نقطة فى المستوى فأوجد أصغر سرعة يقذف بها ليصل إلى أعلى نقطة فيه .

الحــل :

(أولاً) $\because$ م أ = ٢٥٠سم ، ب أ = ١٥٠سم $\therefore$ م ب = ٢٠٠سم

$\because$ جا هـ $= \frac{١٥٠}{٢٥٠} = ٠,٦$ $\therefore$ جتا هـ $= \frac{٢٠٠}{٢٥٠} = ٠,٨$

$\therefore$ الجسم يتزلق إلى أسفل

$\therefore$ الاحتكاك ح يعمل إلى أعلى و يساوى م ر (شكل ١٥) حيث ر هــى رد الفعــل العمــودى .

بالتحليل فى اتجاه المستوى :

$\therefore$ ك ج = ك ء جا هـ − م ر ..... (١)

و بالتحليل فى اتجاه عمودى على المستوى

∴ ر = ك ء جتا هـ ...... (٢)

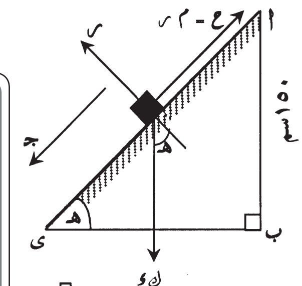
(العجلة فى الاتجاه العمودى على المستوى = صفرا)

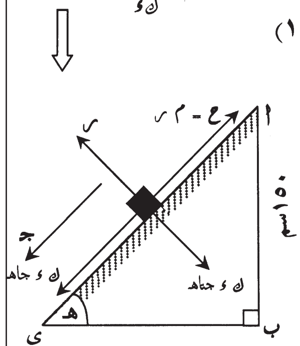
و بالتعويض عن ر من المعادلة (٢) فى المعادلة (١) ينتج أن :

ك جـ = ك ء جا هـ − م ك ء جتا هـ ...... (٣)

∴ جـ = ء (جا هـ − م جتا هـ) ...... (٤)

∴ جـ = ٩٨٠ (٠,٦ − $\frac{١}{٢}$ × ٠,٨) = ١٩٦سم / ث^{٢}

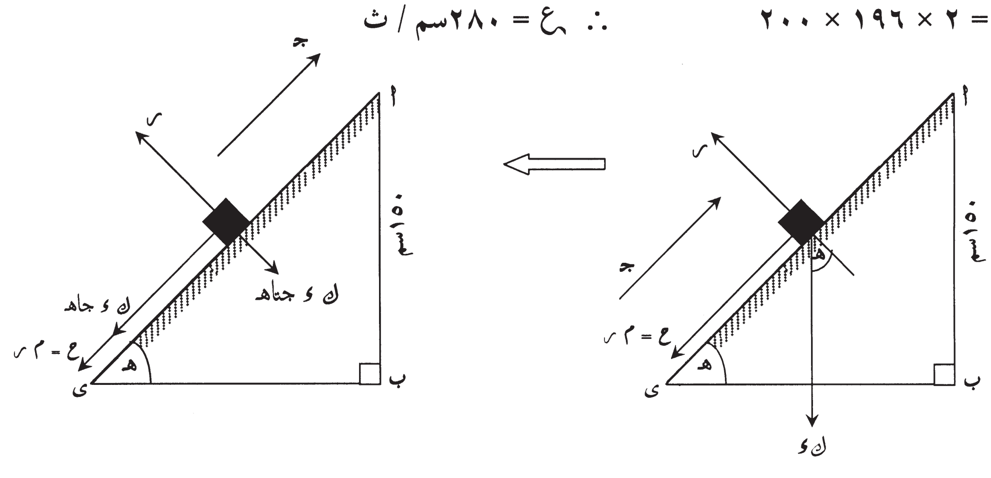




شكل رقم (١٥)

ولإيجاد سرعة الجسم بعد قطعه مسافة ٢٠٠سم نستخدم ع^{٢} = ٢ جـ ف

∴ ع^{٢} = ٢ × ١٩٦ × ٢٠٠ ∴ ع = ٢٨٠سم / ث



شكل رقم (١٦)

(ثانياً) حيث أن الجسم يتحرك إلى أعلى :

إذن الاحتكاك يكون أسفل المستوى (شكل ١٦)

و بالتحليل فى اتجاه المستوى ثم فى اتجاه عمودى عليه ينتج أن :

ك جـ = − ك ء جا هـ − م ر

، ر = ك ء جتا هـ

ك جـ = − ك ء جا هـ − $\frac{١}{٢}$ ك ء جتا هـ ...... (٥)

جـ = − ء (جاهـ + م جتاهـ) = − ٩٨٠ (٠,٦ + $\frac{١}{٢}$ × ٠,٨) = − ٩٨٠ سم / ث^{٢}

لإيجاد سرعة القذف ع. نعتبر السرعة النهائية ع = صفرا بعد قطع مسافة ٢٥٠سم بعجلة تساوى − ٩٨٠سم/ث^{٢}

ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ جـ ف

صفر = ع.^{٢} − ٢ × ٩٨٠ × ٢٥٠ ع.^{٢} = ١٩٦٠ × ٢٥٠

ع. = ٧٠٠سم / ث

<u>مثـــال (٤) :</u>

جسم كتلته ١٠ جم موضوع على مستوى يميل على الأفقى بزاوية ٣٠° و يتصل بخيط يمر على بكرة صـــغيرة ملساء عند أعلى المستوى و يتدلى من الطرف الآخر للخيط جسم كتلته ١٥ جم ، فإذا كان معامل الاحتكاك $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ فأوجد الزمن الذى يقطع فيه الجسم الأول مسافة ١٠٠سم على المستوى وأوجد سرعته عندئذ .

<u>الحـــل :</u>

معادلتا ، حركة الجسم الذى كتلته ١٠ جم فى اتجاه المستوى و الاتجاه العمودى على المستوى هما :

١٠ جـ = ش − ١٠ ء جا ٣٠° − م ر ...... (١)

ر = ١٠ ء جتا ٣٠° ...... (٢)

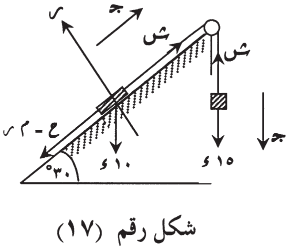
معادلة حركة الجسم الثانى هى :

١٥ جـ = ١٥ ء − ش ...... (٣)

و بالتعويض عن ر فى المعادلة (١) ينتج أن :

١٠ جـ = ش − ١٠ ء × $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ × ١٠ ء × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

١٠ جـ = ش − ١٠ ء ...... (٤)



شكل رقم (١٧)

بجمع المعادلة (٣) و المعادلة (٤) ينتج أن :

$$٢٥ \text{ جـ} = ٥ \text{ ء} \qquad \text{جـ} = \frac{٩٨٠}{٥} = ١٩٦ \text{سم / ث}^٢$$

ولإيجاد الزمن اللازم لقطع مسافة ١٠٠سم ابتداء من السكون بعجلة ١٩٦سم / ث^٢ نستخدم القانون :

$$\text{ف} = \frac{١}{٢} \text{ جـ } \text{ن}^٢ \qquad \therefore ١٠٠ = \frac{١}{٢} \times ١٩٦ \times \text{ن}^٢$$

$$\therefore \text{ن}^٢ = \frac{٢٠٠}{١٩٦} \qquad \text{ن} = \frac{٥\sqrt{٢}}{٧} \text{ ثانية}$$

ولإيجاد السرعة نستخدم القانون :

$$\text{ع}^٢ = ٢ \text{ جـ ف} = ٢ \times ١٩٦ \times ١٠٠$$

$$\text{ع} = ١٤٠\sqrt{٢} \text{ سم / ث}$$

تمـــارين (٢ – ٢)

١- جسم كتلته ٦٠ جم موضوع على نضد أفقى ، ربط بخيط يمر على بكرة ملساء ويحمل فى طرفـه الآخـر جسما كتلته ٣٠ جم يتدلى رأسيا فى حافة النضد ، أوجد عجلة المجموعة إذا كان معامل الاحتكاك ٠,٥ .

٢- جسم كتلته ٥٠ جم موضوع على نضد أفقى ، ربط بخيط يمر على بكرة ملساء ويحمل فى طرفه الآخـر جسما كتلته ٣٠ جم يتدلى رأسيا من حافة النضد ، أوجد العجلة و الشد فى الخـيط إذا كـان معامـل الاحتكاك ٠,٢ .

٣- جسم كتلته ٤٠ جم موضوع على نضد أفقى ، ربط خيط يمر على بكرة ملساء ويحمل فى طرفه الآخـر جسما كتلته ٣٠ جم يتدلى رأسيا من حافة النضد ، إذا كان معامل الاحتكاك يساوى ٠,٥ فأوجد عجلة المجموعة و المسافة المقطوعة بعد ٧ ثوان من بدء الحركة .

٤- جسم كتلته ٤٠ جم موضوع على نضد أفقى ، ربط بخيط يمر على بكرة ملساء ويحمل فى طرفه الآخـر جسما كتلته ٤٠ جم أيضاً و يتدلى رأسيا من حافة النضد ، فإذا كان الجسم الثانى على ارتفاع ١٠سـم من أرض الغرفة وتحركت المجموعة من السكون فأوجد المسافة التى يقطعها الجسم الموضوع على النـضد قبل أن يقف إذا كان معامل الاحتكاك يساوى ٠,٥ .

٥- تنقل الصناديق فى أحد المصانع بانزلاقها على مستوى مائل طوله ١٥ متر و ارتفاعه ٩ أمتار أوجد سرعة الصندوق (بدءا من السكون عند قمة المستوى) و ذلك عند وصوله إلى قمة المستوى :
(أولاً) إذا كان المستوى أملساً (ثانياً) إذا كان المستوى خشناً و كان معامل الاحتكاك ٠,٢٥

٦- مستوى مائل طوله ٤,٥متر وارتفاعه ٢,٧ متر ، وضع جسم عند قمة المستوى و بدأ الحركة من السكون احسب سرعة الجسم عند وصوله إلى قاعدة المستوى و الزمن اللازم إذا كان معامل الاحتكاك ٠,٥ .

٧- يتزلق جسم على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية ٤٥° فإذا كان معامل الاحتكاك ٠,٧٥ فاثبت أن الزمن الذى يقطع فيه أية مسافة يساوى ضعف الزمن الذى يقطع فيه نفس المسافة إذا كان المستوى أملس

٨- وضع جسم كتلته ٥٠ جم على نضد أفقى خشن معامل الاحتكاك بينهما $\frac{١}{٥}$ ووصل بخيط يمر على بكـرة ملساء عند حافة النضد و يحمل فى طرفه جسما كتلته ٣٠ جم . أوجد عجلة المجموعة .

٩- وضع جسم كتلته ٢٠ جم على نضد أفقى خشن ثم ربط بخيط خفيف يمر على بكرة ملساء مثبتـة عنـد حافة النضد و يتدلى من الطرف الخالص للخيط جسم كتلته ٢٠ جم ، بدأت المجموعة تتحرك من حالـة السكون عندما كان الخيط مشدوداً و كان الجسم المدلى على ارتفاع ١٠سـم مـن الأرض و الجـسم الموضوع على النضد على بعد ١٠سم من البكرة ، فإذا كان معامل الاحتكـاك يـساوى $\frac{١}{٢}$ فاثبـت أن المجموعة تتحرك بعجلة قدرها ٢٤٥سم / ث^{٢} . أوجد سرعتها عندما يصل الجـسم المـدلى إلى الأرض ، والمسافة التى يقطعها الجسم الآخر على النضد بعد ذلك حتى يقف .

١٠- وضع جسم كتلته ١٢٠ جم على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٤}{٣}$ ثم ربط الجسم بخيط يمر على بكرة ملساء عند قمة المستوى و يتدلى من طرفه كفة ميزان كتلتها بما فيها من أثقال ١٦٠ جم فإذا كان معامل احتكاك المستوى يساوى $\frac{٢}{٣}$ فأوجد المسافة التى تقطعها المجموعة من السكون فى ٣ ثوان .

١١- وضع جسم كتلته ٣٥٠ جم على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٣}{٤}$ ثم ربط الجسم بخيط خفيف يمر على بكرة ملساء مثبتة عند قمة المستوى ، و يتدلى من الطرف الآخر من الخيط كفة ميزان كتلتها ٧٠ جم ، فإذا علم أن معامل الاحتكاك بين الجسم و المستوى $\frac{١}{٤}$ فأوجد أقل ثقل يلزم وضعه فى الكفة حتى يظل الجسم متزناً .

إذا أضيفت كتلة مقدارها ٢٨٠ جم إلى الكتلة الموجودة بالكفة فأوجد عجلة الحركة و الشد فى الخيط .

١٢- وضع جسم كتلته ٢٠٠ جم على نضد أفقى خشن ثم ربط بخيط خفيف يمر على بكرة ملساء مثبتة عند حافة النضد و يتدلى من الطرف الخالص للخيط جسم كتلته ٢٠٠ جم ، بدأت المجموعة تتحرك من السكون عندما كان الخيط مشدودا و كان الجسم مدلى على ارتفاع ٩٠سم من الأرض و الجسم الموضوع على النضد على بعد ١٣٥سم من البكرة ، فإذا كان معامل الاحتكاك يساوى $\frac{١}{٢}$ فبرهن على أن المجموعة تتحرك بعجلة مقدارها ٢٤٥سم / ث^{٢} ، و أوجد سرعة المجموعة عندما يصل الجسم المدلى إلى الأرض هل الجسم الموضوع على النضد يصل إلى البكرة ؟ وضح إجابتك .

١٣- مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° يتصل عند قمته بمستوى أفقى خشن وضع جسم كتلته ٦٠ جم على المستوى الأفقى و ربط بأحد طرفيه خيط رفيع مار على بكرة ملساء عند حافة اتصال المستويين . و ربط فى الطرف الآخر للخيط جسم كتلته ١٠٠ جم موضوع على المستوى المائل . فإذا كان كل من فرعى الخيط عموديا على خط تقاطع المستويين . فأوجد العجلة التى تتحرك بها المجموعة و الشد فى الخيط علما بان معامل الاحتكاك بين الجسم الأول و المستوى الأفقى $\frac{١}{٤}$ ، بين الجسم الثانى والمستوى المائل $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$. و إذا قطع الخيط بعد ٤ ثوان من بدء الحركة فأوجد المسافة الكلية التى تحركتها الكتلة ٦٠ جم حتى تسكن .

١٤- وضع جسم كتلته ٢٥٠ جم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٣}{٤}$ ثم ربط بخيط يمر على بكرة ملساء عند قمة المستوى و يتدلى من الطرف الخالص للخيط ثقل ، فإذا كان أقل ثقل يلزم تعليقه من هذا الطرف لحفظ توازن الجسم على المستوى يساوى ١٥٠ث جم ، فأثبت أن معامل الاحتكاك يساوى $\frac{١}{٣}$ و إذا علق من الطرف الخالص للخيط ثقل قدره ٣٥٠ ث جم فأوجد العجلة التى تتحرك بها المجموعة .

الفصل الثالث

الدفع والتصادم

Impulse - Collision

- **مقدمـــة :**

نتناول فى هذا الفصل دراسة تأثير القوة الثابتة على جسيم لفترة زمنية متناهية فى الصغر ، و دراسة تصادم الكرات الملساء المباشر (السرعات قبل وبعد التصادم موازية لخط المركزين).

- **الأهداف :**

فى نهاية تدريس هذا الفصل ينبغى أن يكون الطالب قادراً على أن :

١ – يتعرف على مفهوم الدفع .

٢ – يتعرف على القوة الدفعية.

٣ – يتعرف على العلاقة بين الدفع والتغير فى كمية الحركة .

٤ – يتعرف على التصادم المرن و الغير مرن .

٥ – يتعرف على أن مجموع كميتى حركة الجسمين قبل التصادم = مجموع كميتى حركة الجسمين بعد التصادم.

- الموضوعات :

١– الدفع .

٢– القوى الدفعية .

٣– التصادم .

الدفع والتصادم

Impulse -Collision

تمهيد :

فى كثير من الأحيان نحتاج إلى التعامل مع بعض أنواع الحركة التى يتغير فيها متجه سرعة الجسم - فى المقدار أو فى الاتجاه أو فى كليهما - تغيرات ملموسة خلال فترات زمنية ضئيلة للغاية كما يحدث فى العديد من الظواهر التى نشاهدها فى حياتنا اليومية ، مثل ارتطام عجلات الطائرات بأرض المطار عند الهبوط والتحام القاطرات بقوافل العربات وتصادم السيارات ...إلخ .

فى مثل هذه الحالات تكون دراسة حركة الجسم خلال مثل هذه الفترات الزمنية الصغيرة عملية شاقة للغاية بل ومستحيلة فى واقع الأمر ، نظرا لتشابك وتداخل العوامل المؤثرة عليها كالتغير فى أشكال الأجسام المتصادمة والتبادل الحرارى فيما بينها ، ... إلخ .

ويتم التغلب على هذه الصعوبة عادة بالاستعانة بالقوانين التجريبية والمعملية التى تعطينا بعض المعلومات عما يحدث أثناء الفترة الزمنية الصغيرة التى يصعب فيها دراسة الحركة مع الاستفادة بهذه المعلومات فى الربط بين حالة الجسم قبل وبعد حدوث التغير الشديد فى متجه سرعته . وهنا تظهر فائدة إدخال مفهوم " الدفع" و " القوى الدفعية " وهو ما سنتعرض له فيما يأتى :

الدفع :

إذا أثرت قوة ثابتة $\overleftarrow{\text{ق}}$ على جسم ثابت الكتلة خلال فترة زمنية ن ، فأننا نعرف دفع هذه القوة ، ونرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{د}}$ ، على أنه حاصل ضرب متجه القوة فى زمن تأثيرها .

$$\boxed{\overleftarrow{\text{د}} = \overleftarrow{\text{ق}}\ \text{ن}} \qquad (١)$$

يتضح من هذا التعريف أن الدفع متجه له نفس اتجاه متجه القوة .

يمكن أيضا كتابة العلاقة الآتية مقدار متجه الدفع د ومقدار القوة ق

$$\boxed{\text{د} = \text{ق}\ \text{ن}} \qquad (٢)$$

وإذا كانت القوة محدودة المقدار ، فأن مقدار دفعها يؤول إلى الصفر عندما تؤول فترة التأثير إلى الصفر ، كما يتضح من العلاقة (٢) .

وستقتصر دراستنا فيما يلى على الحركة فى خط مستقيم تحت تأثير قوة ثابتة توازى هذا الخط .

نظرية :

> " إذا أثرت قوة ثابتة على جسيم لفترة زمنية متناهية الصغر فأن التغير فى كمية حركته خلال هذه الفترة يساوى دفع القوة " .

البرهان :

نعتبر وضعين للجسيم عند لحظتين زمنيتين متتاليتين ومتقاربتين للغاية ن ، $\text{ن} + \text{هـ}$ وليكن م ، مَ القياسين الجبريين لكميتى حركته عند هاتين اللحظتين على الترتيب منسوبين إلى متجه وحدة يوازى الخط المستقيم الذى تتم عليه الحركة .

من القانون الثانى لنيوتن :

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \text{ق} \quad \text{حيث ق القياس الجبرى للقوة}$$

بما أن :

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} = \lim_{\text{هـ} \to 0} \frac{\text{مَ} - \text{م}}{\text{هـ}}$$

$\therefore$ يمكن كتابة العلاقة التقريبية الآتية :

$$\frac{\text{د م}}{\text{د ن}} \simeq \frac{\text{مَ} - \text{م}}{\text{هـ}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{مَ} - \text{م}}{\text{هـ}} = \text{ق}$$

أى أن مَ – مـ = ق هـ

ولكن الطرف الأيسر لهذه العلاقة يساوى دفع القوة خلال الفترة الزمنية هـ

∴ | مَ – مـ = د | (١)

وإذا كانت ك هى كتلة الجسيم ، ع ، عَ هما القياسين الجبريين لمتجهى السرعة عند اللحظتين ن ، ن + هـ على الترتيب ، فأنه يمكن كتابة العلاقة الأخيرة فى الصورة التالية :

| ك عَ – ك ع = د | (٢)

أى أن التغيير فى قياس كمية الحركة يساوى الدفع .

القوى الدفعية :

نعتبر الآن نوعا خاصا من القوى يتميز بالخاصية الآتية :

كلما صغرت فترة تأثير القوة على الجسم ، إزداد مقدار القوة بحيث تتحقق العلاقة نهـا (ن ← ٠) (ق→ ن) = عدداً محدوداً لا يساوى الصفر .

يقال عندئذ للقوة إنها " قوة دفعية " ويعرف دفعها كالآتى :

| د→ = نهـا (ن ← ٠) (ق→ ن) ≠ ٠→ |

ويكون مقداره

| د = نهـا (ن ← ٠) ق ن ≠ ٠ . |

و على ذلك ، فالقوة الدافعية :

١ – تؤثر على الجسم خلال فترة زمنية متناهية فى الصغر .

٢ – يكون مقدارها متناهيا فى الكبر .

٣ – يكون مقدار دفعها محدوداً وغير مساو للصفر (أو أن متجه دفعها محدود المقدار

وغير مساو للمتجه الصفرى) .

ويمكن إثبات أن العلاقة (١) تظل صحيحة فى حالة القوى الدفعية :

وحدات قياس مقدار الدفع :

من تعريف الدفع ينتج أن :

وحدة قياس مقدار الدفع = وحدة قياس مقدار القوة × وحدة قياس الزمن

وبالتالى يمكن أن تكون وحدات قياس مقدار الدفع مثلا :

نيوتن . ثانية أو داين . ثانية . ... إلخ .

كما يمكن التعبير عن وحدات قياس مقدار الدفع بطريقة أخرى بملاحظة أن :

مقدار الدفع = مقدار التغير فى كمية الحركة .

∴

وحدة قياس مقدار الدفع = وحدة قياس مقدار الكتلة × وحدة قياس مقدار السرعة

وعلى ذلك فيمكن أن تكون وحدة قياس مقدار الدفع هى :

كيلو جرام . متر / ثانية أو جرام . سنتيمتر / ثانية ، .. إلخ

وإذا التزمنا بجدول استخدام الوحدات الموضح سابقا ، فأن :

١ - إذا قيست الكتلة بالكيلو جرام ومقدار السرعة بالمتر / ثانية ، فأن وحدة مقدار الدفع تكون كجم . متر / ث أو نيوتن . ث .

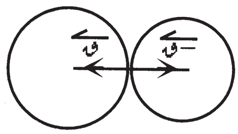
٢ - إذا قيست الكتلة بالجرام ومقدار السرعة بالسنتيمتر / ثانية ، فأن وحدة مقدار الدفع تكون جم . سم / ث أو داين ، ث .

التصادم :

<u>تصادم الكرات الملساء</u> : إذا تصادمت كرتان بحيث أمكن أعتبار هذا التصادم لحظيا (أى أنه قد استغرق وقتا متناهيا فى الصغر) ولفرض أن الكرتين احتفظتا بشكليهما ، فأن التصادم

بينهما يحدث فى نقطة واحدة هى النقطة التى تلامست عندها الكرتان لحظة التصادم . وعند هذه اللحظة ، تؤثر كل من الكرتين على الأخرى بقوة ما ، بحيث تحقق القوتان القانون الثالث لنيوتن ، أى أن كل منهما تساوى الأخرى فى المقدار وتضادها فى الاتجاه .

ومن الطبيعى أن نعتقد أن القوى المتبادلة بين الكرتين هى قوى دفعية ، إذ أننا نلاحظ تغيرا ملموسا فى سرعتى الكرتين قبل وبعد التصادم مباشرة خلال الفترة الزمنية الصغيرة للغاية التى يحدث خلالها التصادم .



(شكل ٤٧)

وعلى ذلك يكون دفع الكرة الأولى على الثانية مساو فى المقدار ومضاد فى الاتجاه لدفع الكرة الثانية على الأولى .

وإذا كانت الكرتان ملساوين ، فأن التجربة تدل على أن القوة التى تؤثر بها أى من الكرتين على الأخرى تعمل فى خط المركزين عند لحظة التصادم .

وإذا كانت السرعتان قبل التصادم مباشرة توازيان خط المركزين عند لحظة التصادم ، فأن التصادم يسمى تصادمًا مباشراً . أما فى الحالات الأخرى ، فيسمى التصادم تصادما غير مباشر أو تصادمًا مائلا ، والنوع الأخير من التصادم خارج نطاق هذا الكتاب .

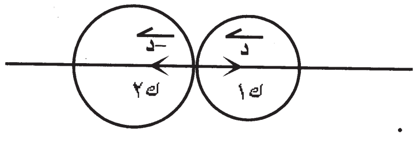
فيما يلى نعتبر التصادم المباشرة بين كرتين ملساوين .

لتكن $ك_1$ ، $ك_2$ كتلتى الكرتين .

$\overleftarrow{د}$ دفع الكرة الثانية على الكرة الأولى .

$\overleftarrow{ع_1}$ ، $\overleftarrow{ع_2}$ متجهى سرعة الكرتين قبل التصادم مباشرة .

$\overleftarrow{ع'_1}$ ، $\overleftarrow{ع'_2}$ متجهى سرعة الكرتين بعد التصادم مباشرة .



(شكل ٤٨)

∴ التغير فى كمية حركة أى من الكرتين = الدفع المؤثر عليها بالنسبة للكرة الأولى .

بالنسبة للكرة الأولى :

$$\text{ك}_1 \overleftarrow{\text{ع}'_1} - \text{ك}_1 \overleftarrow{\text{ع}_1} = \overleftarrow{\text{د}}$$

ولكن المتجهان $\overleftarrow{\text{ع}_1}$ ، $\overleftarrow{\text{د}}$

يوازيان خط المركزين .

المتجه $\overleftarrow{\text{ع}'_1}$ يوازى أيضا هذا الخط .

وبالنسبة للكرة الثانية :

$$\text{ك}_2 \overleftarrow{\text{ع}'_2} - \text{ك}_2 \overleftarrow{\text{ع}_2} = - \overleftarrow{\text{د}}$$

بما أن كلا من $\overleftarrow{\text{ع}_2}$ ، $-\overleftarrow{\text{د}}$ يوازى خط المركزين

∴ المتجه $\overleftarrow{\text{ع}'_2}$ يوازى أيضا هذا الخط .

وعلى ذلك نصل الى النتيجة الهامة التالية :

« فى التصادم المباشر تكون السرعتان بعد التصادم مباشرة موازيتين لخط المركزين »

وبجمع العلاقتين الآخرين نجد :

$$(\text{ك}_1 \overleftarrow{\text{ع}'_1} - \text{ك}_1 \overleftarrow{\text{ع}_1}) + (\text{ك}_2 \overleftarrow{\text{ع}'_2} - \text{ك}_2 \overleftarrow{\text{ع}_2}) = \overleftarrow{0}$$

$$\therefore \text{ك}_1 \overleftarrow{\text{ع}'_1} + \text{ك}_2 \overleftarrow{\text{ع}'_2} = \text{ك}_1 \overleftarrow{\text{ع}_1} + \text{ك}_2 \overleftarrow{\text{ع}_2}$$

وبذلك تتحقق النظرية الآتية :

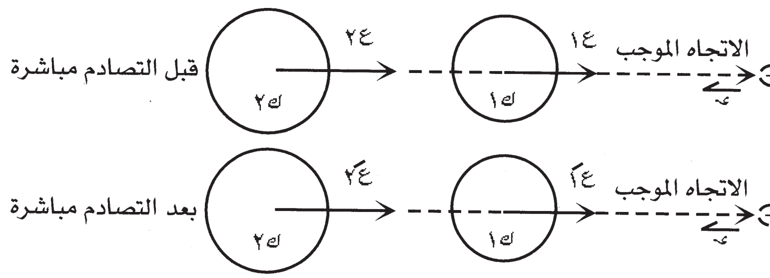
نظرية :

إذا تصادمت كرتان ملساوان فإن مجموع كميتى حركتهما لا يتغير نتيجة للتصادم .

أى أن مجموع كميتى الحركة قبل التصادم يساوى مجموعهما بعد التصادم .

ولما كانت السرعات قبل وبعد التصادم توازى اتجاه خط المركزين لحظة التصادم ، فإنه يمكن استخدام القياسات الجبرية لمتجهات السرعة والدفع بدلا من المتجهات ذاتها .

نعتبر الخط المستقيم الذى ينطبق على خط المركزين لحظة التصادم ونختار عليه متجه وحدة $\overleftarrow{ى}$ يشير إلى الاتجاه الموجب شكل (٤٩)



(شكل ٤٩)

ليكن د القياس الجبرى لدفع الكرة الثانية على الكرة الأولى ،

$ع_١$ ، $ع_٢$ القياسين الجبريين لسرعتهما قبل التصادم مباشرة .

$ع_١َ$ ، $ع_٢َ$ القياسين الجبريين لسرعتهما بعد التصادم مباشرة تأخذ العلاقات السابقة الصور الآتية :

$ك_١ ع_١َ - ك_١ ع_١ = د$	(١)
$ك_٢ ع_٢َ - ك_٢ ع_٢ = - د$	(٢)
$ك_١ ع_١َ + ك_٢ ع_٢َ = ك_١ ع_١ + ك_٢ ع_٢$	(٣)

مثال (١) :

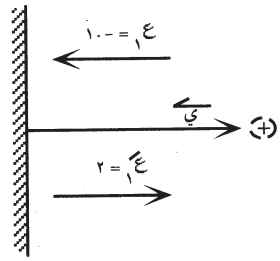
تتحرك كرة ملساء كتلتها ٢٠٠ جم فى خط مستقيم على أرض أفقية بسرعة ١٠ متر / ث . فإذا اصطدمت هذه الكرة بحائط رأسى أملس عمودى على اتجاه سرعتها وارتدت منه بسرعة ٢ متر / ث . عين مقدار دفع الحائط على الكرة .

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب على الخط المستقيم الذى تتم عليه الحركة كما هو موضح بالرسم فى شكل (٥٠) .

نعتبر الحائط كرة ملساء ساكنة ذات نصف قطر كبير للغاية .

(وذات كتلة كبيرة للغاية) .



(شكل ٥٠)

ع$_1$ = − ١٠ متر / ث ، عَ$_1$ = ٢ متر / ث ، ك$_1$ = ٢٠٠ جم

بتطبيق العلاقة (١)

د = ٢٠٠ × (٢ + ١٠) = ٢٠٠ × ١٢

∴ د = ٢٤٠٠ جم . متر / ث

لاحظ هنا أن وحدات الدفع غير متجانسة (ولكنها صحيحة) إذ أنها تحتوى على الجرام والمتر معا . وإذا أردنا التعبير عن مقدار الدفع بوحدات متجانسة ، فعلينا أن نحول الكتلة إلى وحدة الكيلو جرام (نظام م . ك . ث) أو أن نحول مقدار السرعة إلى وحدة السنتيمتر / ثانية (نظام س . ج . ث) .

فى الحالة الأولى نضع ك$_1$ = ٠٫٢ كجم ويكون

د = ٠٫٢ × ١٢ = ٢٫٤ كجم . متر / ث

= ٢٫٤ نيوتن . ث

أما فى الحالة الثانية ، فإننا نضع :

ع$_1$ = − ١٠٠٠ سم / ث ، عَ$_1$ = ٢٠٠ سم / ث

فيكون : د = ٢٠٠ × ١٢٠٠ = ٢٫٤ × ١٠^{٥} جم . سم / ث

= ٢٫٤ × ١٠^{٥} داين . ث

مثال (٢) :

تتحرك كرتان ملساوان كتلة كل منهما ٢٠٠ جم فى خط مستقيم واحد على أرض أفقية ، الأولى بسرعة ٥ متر/ث والثانية بسرعة ٩ متر/ث فى نفس اتجاه الأولى .

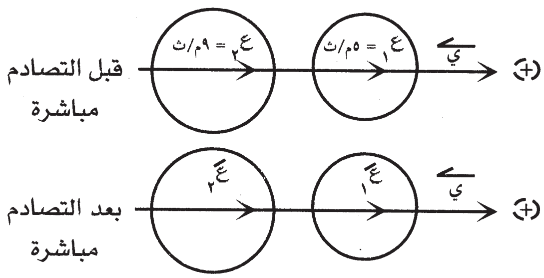
إذا تصادمت الكرتان ، عين سرعة كل منهما بعد التصادم مباشرة علما بأن مقدار دفع الكرة

الثانية على الأولى يساوى ٠,٦ × ١٠^{٥} داين . ث

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه متجهى السرعة قبل التصادم مباشرة شكل (٥١)

∴ ع$_{١}$ = ٥ متر / ث ، ع$_{٢}$ = ٩ متر / ث بما أن دفع الكرة الثانية على الكرة الأولى يكون فى الاتجاه الموجب .



(شكل ٥١)

∴ د = ٠,٦ × ١٠^{٥} داين . ث

بما أن وحدات السرعة والدفع هنا غير متجانسة فعلينا أن نحول السرعات إلى وحدة سم / ث

أو مقدار الدفع إلى وحدة نيوتن . ث

وباختيار الطريقة الأولى :

∴ ع$_{١}$ = ٥٠٠ سم / ث ، ع$_{٢}$ = ٩٠٠ سم / ث

وبتطبيق العلاقة (١) بالنسبة للكرة الأولى :

$$\text{ع}'_{1} = \text{ع}_{1} + \frac{\text{د}}{\text{ك}_{1}}$$

$$\therefore \text{ع}'_{1} = 500 + \frac{60000}{200} = 800 \text{ سم / ث}$$

وبتطبيق العلاقة (١) بالنسبة للكرة الثانية :

$$\text{ع}'_{2} = \text{ع}_{2} - \frac{\text{د}}{\text{ك}_{2}}$$

$$\therefore \text{ع}'_{2} = 900 - \frac{60000}{200} = 600 \text{ سم / ث}$$

إذن ، فالكرتان تتحركان بعد التصادم فى نفس اتجاه حركتهما الأصلى ، الأولى بسرعة ٨ متر / ث والثانية بسرعة ٦ متر / ث .

مثال (٣) :

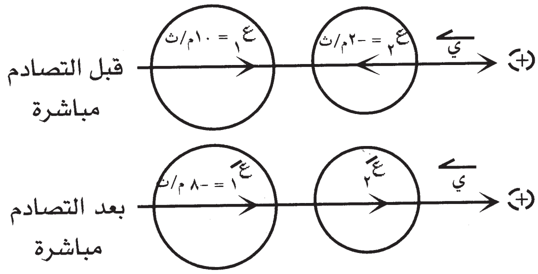
تتحرك كرتان فى خط مستقيم واحد على أرض أفقية إحداهما نحو الأخرى فإذا كانت كتلة الكرة الأولى ١٠٠ جم وسرعتها ١٠ متر / ث وكانت كتلة الثانية ٣٠٠ جم وسرعتها ٢ متر / ث أوجد سرعة الكرة الثانية بعد التصادم مباشرة ودفعها على الكرة الأولى ، علما بأن الكرة الأولى ارتدت بعد التصادم مباشرة فى عكس اتجاه حركتها الأصلى بسرعة ٨ م / ث .

الحل

ليكن الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الكرة الأولى شكل (٥٢)

$\therefore$ ع$_{١}$ = ١٠ متر / ث ، ع$_{٢}$ = -٢ متر / ث

ع$'_{١}$ = - ٨ متر / ث



(شكل ٥٢)

نعبر عن الكتل بوحدات الكيلو جرام

فيكون ك$_{١}$ = ٠.١ كجم ، ك$_{٢}$ = ٠.٣ كجم .

بتطبيق العلاقة (١) بالنسبة للكرة الأولى

$$ع'_{١} = ع_{١} + \frac{د}{ك_{١}}$$

$$\therefore -٨ = ١٠ + \frac{د}{٠.١}$$

$\therefore$ د = ١.٨ نيوتن . ث

أى أن مقدار دفع الكرة الثانية على الكرة الأولى يساوى ١.٨ نيوتن . ث بالتعويض فى العلاقة .

* بالنسبة للكرة الثانية

$$ع'_{٢} = ع_{٢} - \frac{د}{ك_{٢}}$$

$$\therefore ع'_{٢} = -٢ - \frac{(-١.٨)}{٠.٣}$$

$\therefore$ ع$'_{٢}$ = ٤ متر / ث

مما يعنى أن الكرة الثانية ارتدت بعد التصادم فى عكس اتجاه حركتها الأولى بسرعة ٤متر/ث

تمارين (٣)

١- عربة سكة حديد كتلتها ٢١ طن تسير بسرعة ١٤ متر/ ث . أوقفها حاجز للتصادم فى زمن قدره ٠,٣ ثانية . أوجد مقدار الدفع ، مقدار متوسط القوة بثقل الطن .

٢ - كرة كتلتها ٥٠ جم سقطت من ارتفاع ٢,٥ متر على أرض أفقية فارتدت إلى ارتفاع ٠,٩ متر . أوجد متوسط القوة بين الكرة والأرض إذا كان زمن التلامس ٠,١ ثانية .

٣ - كرة كتلتها ٥٠٠ جرام سقطت من ارتفاع ٢,٥ متر على سطح سائل لزج فغاصت فيه بسرعة منتظمة وقطعت مسافة ٣,٥ متر فى ٢ ثانية . أحسب دفع السائل للكرة .

٤ - تتحرك كرة ملساء كتلتها ١٥٠ جم على أرض أفقية فى خط مستقيم بسرعة ٠,٦ متر/ث اصطدمت هذه الكرة بحائط رأسى وعمودى على اتجاه حركتها فارتدت منه بسرعة ٢٠سم/ث . عين مقدار دفع الحائط على الكرة .

٥ - اصطدمت كرة ملساء كتلتها ٤٠٠ جم ومتحركة على أرض أفقية بسرعة ١٠٠ سم/ ث تصادما مباشراً بحائط رأسى فأثر عليها بدفع مقداره ٠,٤٨ نيوتن. ث عين سرعة ارتداد الكرة من الحائط .

٦ - تتحرك كرتان ملساوان كتلتاهما ٠,٢ كجم ، ٠,٤ كجم فى خط مستقيم واحد على أرض أفقية وكانت سرعة الأولى ٦ متر/ ث وسرعة الثانية ٨ متر/ ث فى نفس اتجاه حركة الأولى . تصادمت الكرتان فزادت سرعة الكرة الأولى نتيجة للتصادم بمقدار ٢ متر / ث . عين سرعة الكرة الثانية بعد التصادم مباشرة ومقدار دفع أى من الكرتين على الآخرى .

٧ - تتحرك كرتان ملساوان كتلتاهما ١٠٠ جم ، ٢٠٠ جم فى خط مستقيم واحد على أرض

أفقية وكانت سرعة الأولى ١ متر/ث وسرعة الثانية ٢ متر/ ث فى الاتجاه المضاد ، فإذا تصادمت الكرتان واستمرت الكرة الثانية فى نفس اتجاه حركتها بسرعة ٠,٧٥ متر /ث بعد التصادم ، عين سرعة الكرة الأولى ودفع الثانية عليها .

٨ - تتحرك كرة ملساء كتلتها ٢٠٠ جم على نضد أفقى فى خط مستقيم بسرعة ٦٠ سم/ث. صدمت هذه الكرة كرة ثانية ملساء ساكنة على النضد كتلتها ٤٠٠ جم . فإذا سكنت الكرة الأولى نتيجة للتصادم . أثبت أن الثانية تتحرك بسرعة ٣٠ سم / ث بعد التصادم ، ثم أوجد مقدار الدفع المتبادل بين الكرتين .

٩ - يتحرك جسمان كتلتهما ٢٠٠ جم ، ٨٠٠ جم فى خط مستقيم واحد على نضد أفقى بسرعة ٤ متر/ ث فى اتجاهين متضادين ، فإذا تحرك الجسمان بعد التصادم كجسم واحد ، أوجد السرعة بعد التصادم .

١٠ - تتحرك كرتان ملساوان كتلتاهما ك ، ٢ ك على نضد أفقى أملس فى خط مستقيم واحد وفى نفس الاتجاه . بحيث كانت الكرة الصغرى فى الأمام وسرعتها ١٠ متر / ث . والكرة الكبرى فى الخلف وسرعتها ١٢ متر/ ث . وبعد التصادم تحركت الكرة الصغرى فى نفس اتجاه حركتها السابقة بسرعة ١٢ متر/ ث . فما هى سرعة الكرة الكبرى بعد التصادم ؟

١١ - قذفت كرتان ملساوان متساويتا الكتلة على نضد أفقى أملس . بحيث تحركتا على خط مستقيم واحد ، الأولى بسرعة ٣٠ سم / ث ، والثانية بسرعة ٢٠ سم/ ث فى اتجاه مضاد للأولى ، فإذا ارتدك الكرة الثانية بعد التصادم بسرعة ١٠ سم/ ث ، أوجد سرعة الكرة الأولى بعد التصادم .

١٢ - قذفت كرتان ملساوان على نضد أفقى أملس بحيث تحركتا على خط مستقيم واحد وفى نفس الاتجاه . فإذا كانت كتلة الكرة الأمامية تساوى ٥٠٠ جم ، ومقدار سرعتها ٢٠سم/ث

، وكتلة الكرة الخلفية ٢٠٠ جم ومقدار سرعتها ٥٠ سم/ ث .

أوجد سرعة الكرتين بعد التصادم علما بأنهما التحمتا فى جسم واحد .

١٣ - تتحرك كرتان ملساوان كتلة كل منهما ٤٠٠ جم فى خط مستقيم واحد على نضد أفقى أملس بسرعة ٤ متر/ ث فى نفس الاتجاه وبينهما مسافة ما . وضع حاجز على النضد بحيث يقطع مسار الكرتين على التعامد فاصطدمت به الكرة الأمامية وارتدت لتصدم الكرة الخلفية ثم ارتدت مرة ثانية بسرعة ٢ متر/ ث . عين سرعة الكرة الخلفية بعد التصادم علما بأن الحاجز قد أثر على الكرة الأولى بدفع مقداره ٢.٨ نيوتن . ث .

١٤ - كرة كتلتها $\frac{١}{٢}$ كجم سقطت من ارتفاع ٣.٦ متر على أرض أفقية فارتدت وبلغت ارتفاعًا مقداره ١.٦ متر . أوجد متوسط القوة بين الكرة والأرض إذا تلامستا مدة ٠.٠١ ثانية .

١٥ - اطلقت رصاصة كتلتها ١٥ جم بسرعة مقدارها ١٤٥٠.٨ متر/ دقيقة على هدف ساكن كتلته ٢ كجم فالتصقت به وتحرك الجسمان بعد التصادم كجسم واحد . برهن على أن سرعة هذا الجسم عقب الاصابة مقدارها ١٨ سم/ث . وإذا لاقى هذا الجسم مقاومة ثابتة أثناء حركته وسكن بعد أن قطع مسافة ٨١ سم ، أوجد هذه المقاومة .

١٦ - كرة كتلتها $\frac{١}{٢}$ كجم تتحرك فى خط مستقيم بسرعة مقدارها ٤٤ سم/ ث فاذا اصطدمت بكرة أخرى ساكنة على النضد وكتلتها $\frac{١}{٢}$ ١ كجم وتحركتا معا كجسم واحد أوجد السرعة المشتركة لهما بعد التصادم مباشرة .

وإذا فرض أن الجسم يتحرك بعد التصادم ضد مقاومة ثابتة فوقف بعد قطع مسافة قدرها ١١ سم ، أوجد المقاومة .

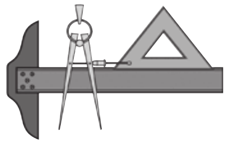
١٧- تتحرك كرة كتلتها ١٢٠ جم بسرعة منتظمة ٤٠ سم / ث وبعد مرورها بموضع معين وبزمن

قدره دقيقة واحدة تحركت من نفس الموضع كرة أخرى كتلتها ٨٠ جم بسرعة ابتدائية ٦٠ سم/ ث وبعجلة تزايدية ٤ سم / ث^{٢} فى نفس اتجاه حركة الكرة الأولى فاذا تصادمت الكرتان وتحركتا معا كجسم واحد ، احسب السرعة المشتركة لهما بعد التصادم مباشرة . وإذا تحرك الجسم بعد التصادم تحت تأثير مقاومة ثابتة تساوى ٣٨٤٠ داين . احسب متى يسكن الجسم .

١٨- ا ب حـ هو خط أكبر ميل فى مستوى أملس يميل على الافقى بزاوية قياسها ٣٠° حيث ا حـ = ١٩.٦ متر وكانت ا هى النقطة العليا ، ب فى منتصف $\overline{\text{ا حـ}}$ وصفت كرة كتلتها ٣ جم عند أ فتحركت على $\overline{\text{ا حـ}}$ واصطدمت عند ب بكرة أخرى ساكنة كتلتها ١ جم فاذا كونت الكرتان بعد التصادم جسما واحدا . أوجد الزمن الذى يمضى بعد التصادم حتى يصل الجسم إلى حـ

١٩- سقطت كرة من المطاط كتلتها كيلو جرام واحد من ارتفاع ٤.٩ متر على سطح أرض أفقية صلبة فارتدت إلى أقصى ارتفاع لها وهو ٢.٥ متر ، احسب مقدار التغير فى كمية حركة الكرة نتيجة إصطدامها بالارض ، ثم أوجد مقدار رد فعل الأرض على الكرة بالنيوتن إذا كان زمن تلامس الكرة بالأرض ٠.١ ثانية .

الفصل الرابع



الشغل . القدرة . الطاقة

Wark - Power - Energy

مقدمة :

تراثنا العربى والاسلامى غنى بأمثلة كثيرة عن نظريات واختراعات ، كانت نتاج جهود العديد من علماء المسلمين ، ومنهم أولاد موسى بن شاكر حيث اهتموا بدراسة الحركة والقوة وهو ما كان يعرف بعلم الحيل الهندسية أو ما يعرف الآن بعد تطوره بعلم الميكانيكا فقد كان لهم فضل كبير فى صناعة كثيراً من الآلات الحرارية كالمحركات مثلاً التى تستهلك الطاقة وتعطى شغلاً نستفيد منه فى مختلف المجالات .

الأهداف :

فى نهاية تدريس هذا الفصل ينبغى أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يتعرف الشكل المبذول بواسطة قوة ثابتة ووحدات قياسه .
- يتعرف مفهوم القدرة ووحدات قياسها .
- يتعرف طاقة حركة الجسيم ووحدات قياسه .
- يتعرف مبدأ الشغل والطاقة .
- يتعرف طاقة الوضع ووحدات قياسها وتطبيقاتها .

الموضوعات

(١) الشغل :

(٢) القدرة .

(٣) الطاقة .

الشغل - القدرة - الطاقة

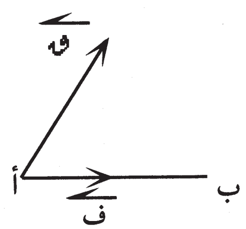
Wark - Power - Energy

يعتبر الشغل والقدرة والطاقة من المفاهيم الأساسية فى علم الميكانيكا وترتبط ارتباطا وثيقا بحياتنا العملية ، فالآلات الحرارية كالمحركات مثلا تستهلك الطاقة وتعطى شغلا نستفيد به فى مختلف المجالات ، مما يدعو إلى تحديد تعريفات دقيقة لهذه المفاهيم وإلى محاولة استخلاص العلاقات التى تربط بينها من جانب وبينها وباقى خصائص الحركة كالازاحة والسرعة والعجلة والقوة من جانب آخر .

وستقتصر دراستنا فيما يلى على تعريف الشغل والقدرة والطاقة للقوة الثابتة واضعين فى الاعتبار امكانية التطبيق على الحركة تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية بأعتبارها ثابتة . كما يلاحظ أنه عند التحدث عن القوة المؤثرة على جسيم ، فأن المقصود بذلك هو محصلة القوى المؤثرة عليه .

الشغل المبذول بواسطة قوة ثابتة :

نعتبر جسيما يتحرك على خط مستقيم تحت تأثير قوة ثابتة ق ولنفرض انه انتقل من موضع ابتدائى أ إلى موضع ب ، كما فى شكل (٥٣) وكان متجه إزاحته أ ب = ف



(شكل ٥٣)

تعريف :

يعرف الشغل المبذول بواسطة القوة الثابتة ق فى تحريك جسيم من موضع ابتدائى إلى موضع نهائى ويرمز له بالرمز ش على أنه يساوى حاصل الضرب القياسى لمتجه القوة فى متجه الازاحة بين الموضعين .

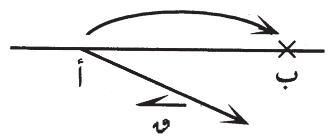
ش = ق ⊙ ف (١)

يتضح إذا أن الشغل هو كمية قياسية ، قد تكون موجبة أو سالبة أو مساوية للصفر تبعا لاتجاه ومقدار كل من المتجهين ق ، ف وأن الشغل يعرف دائما بين موضعين (أو بين لحظتين زمنيتين) أحدهما ابتدائى والآخر نهائى ، أيضا ينتج من التعريف مباشرة أن :

" الشغل لا يتوقف على المسار الذى سلكه الجسيم فى الانتقال من الموضع الابتدائى إلى

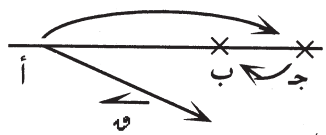
الموضع النهائى ، بل يتوقف فقط على هذين الموضعين " .

يبين شكل (٥٤) حالتين لحركة الجسيم يكون فيهما الشغل واحدا (بفرض أن القوة المؤثرة واحدة فى الحالتين) .



الانتقال من أ إلى ب

(شكل ٥٤ - أ)



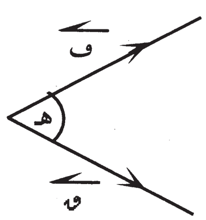
الانتقال من أ إلى جـ ثم من جـ إلى ب

(شكل ٥٤ - ب)

وعلى وجه الخصوص " إذا تحرك جسيم من موضع ما ثم عاد إلى نفس هذا الموضع ، فأن الشغل المبذول خلال المسار يساوى الصفر " .

ويمكن التحقق من هذه الخاصية بسهولة بملاحظة أن متجه الأزاحة فى هذه الحالة هو المتجه الصفرى .

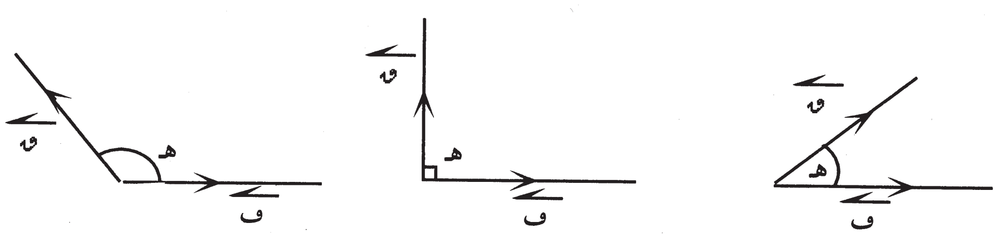
وإذا كان هـ هو قياس الزاوية التى يحصرها المتجهان ق ، ف عند رسمهما خارجين من نقطة واحدة شكل (٥٥) فأنه يمكن كتابة العلاقة (١) على الصورة .



(شكل ٥٥)

ش = || ق || || ف || جتا هـ (٢)

يبين شكل (٥٦) بعض الحالات المختلفة لمتجهى القوة والازاحة .



(شكل ٥٦)

ملاحظة : عندما يكون الشغل المبذول بين موضعين سالبًا ، فإننا نسميه شغلا مقاومًا ، ومثال ذلك الشغل الذى تبذله قوة المقاومة أو قوة الاحتكاك ، كما سيتضح من الأمثلة .

مثال (١) :

تحرك جسم على خط مستقيم تحت تأثير القوة $\overleftarrow{\text{ق}} = ٥\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ص}}$ من النقطة أ = (١، ٠) إلى النقطة ب = (٣ ، ٣) حيث ينسب التحليل إلى مجموعة محاور ديكارتية متعامدة $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$. عين الشغل المبذول .

الحل

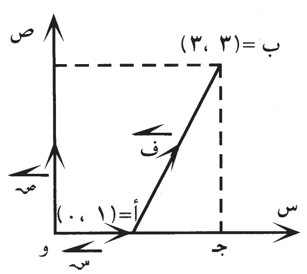
يبين شكل (٥٧) موضع كل من النقطتين أ ، ب بالنسبة للمحاور .

لحساب متجه الازاحة $\overleftarrow{\text{ف}} = \overleftarrow{\text{أ و}} + \overleftarrow{\text{و ب}}$

$= \overleftarrow{\text{و ب}} - \overleftarrow{\text{و أ}}$

$\therefore \overleftarrow{\text{ف}} = (٣ - ١)\,\overleftarrow{\text{س}} + (٣ - ٠)\,\overleftarrow{\text{ص}}$

$= ٢\,\overleftarrow{\text{س}} + ٣\,\overleftarrow{\text{ص}}$



(شكل ٥٧)

نطبق تعريف الشغل مع ملاحظة أن القوة المعطاة ثابتة .

$\text{ش} = \overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{ف}}$

$= (٥\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ص}}) \odot (٢\,\overleftarrow{\text{س}} + ٣\,\overleftarrow{\text{ص}})$

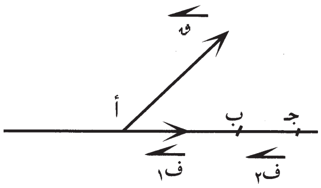
$= ٥ \times ٢ + (-٣) \times (٣)$

$= ١$ وحدة قياس الشغل .

قاعدة :

إذا حدثت للجسم إزاحتان متتاليتان تحت تأثير قوة ما ، فإن الشغل المبذول خلال الازاحة المحصلة يساوى مجموع الشغلين المبذولين خلال كل منهما .

البرهان :



لنفرض أن $ش_1$ ، $ش_2$ الشغلين المبذولين خلال الازاحتين $\overleftarrow{ف_1}$ ، $\overleftarrow{ف_2}$ على الترتيب ، ش الشغل المبذول خلال الازاحة الكلية شكل (٥٨) .

من التعريف : $ش_1 = \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ف_1}$ ، $ش_2 = \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ف_2}$ (شكل ٥٨)

إذا انتقل الجسم خلال الإزاحة الأولى من النقطة أ إلى نقطة ب .. فأن الإزاحة المحصلة تعنى انتقال الجسم من نقطة أ الى نقطة جـ . وهى تناظر متجه الازاحة ($\overleftarrow{ف_1} + \overleftarrow{ف_2}$)

$\therefore ش = \overleftarrow{ق} \odot (\overleftarrow{ف_1} + \overleftarrow{ف_2}) = \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ف_1} + \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ف_2}$

$= ش_1 + ش_2$ وهو المطلوب اثباته .

ويلاحظ أن هذه القاعدة تسرى أيضا على مجموع أى عدد محدود من الازاحات المتتالية .

مثال (٢) :

تحرك جسيم على خط مستقيم من موضع أ الى موضع جديد ب ثم عاد مرة ثانية إلى موضعه الابتدائى . استخدم القاعدة السابقة لبيان أن الشغل الكلى المبذول يساوى الصفر .

الحل

ليكن $ش_1$ ، $ش_2$ الشغلين المبذولين خلال الازاحتين إلى ب ثم من ب إلى على الترتيب بواسطة القوة $\overleftarrow{ق}$

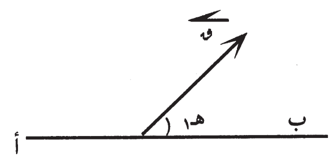
$ش_1 = \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{أب}$ ، $ش_2 = \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ب أ}$

$\therefore ش_1 + ش_2 = \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{أب} + \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ب أ}$

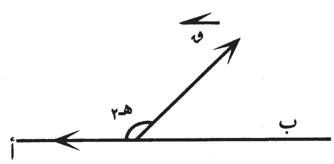
$= \overleftarrow{ق} \odot (\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{ب أ})$

$= \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{.} =$ صفر

يبين شكلا (٥٩) كيفية حساب الشغلين $\text{ش}_{١}$ ، $\text{ش}_{٢}$ باستخدام العلاقة (٢) لحساب حاصل الضرب القياسى للمتجهين $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}$ وقد رمزنا بالرمزين $\text{هـ}_{١}$ ، $\text{هـ}_{٢}$ لقياس الزاويتين بين $\overleftarrow{\text{ق}}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}}$ خلال كل من الازاحتين .



(شكل ٥٩ -أ)



(شكل ٥٩-ب)

الازاحة من أ إلى ب

$\text{ش}_{١} = \| \overleftarrow{\text{ق}} \| \times \text{أ ب} \times \text{حتا هـ}_{١}$

الإزاحة من ب إلى أ

$\text{ش}_{٢} = \| \overleftarrow{\text{ق}} \| \times \text{أ ب} \times \text{حتا هـ}_{٢}$

$= \| \overleftarrow{\text{ق}} \| \times \text{أ ب} \times \text{حتا}(١٨٠^{\circ} - \text{هـ}_{١})$

$= - \| \overleftarrow{\text{ق}} \| \times \text{أ ب} \times \text{حتا هـ}_{١}$

$= - \text{ش}_{١}$

وإذا كانت القوة توازى الازاحة فإنه يمكن التعبير عن كل من هذين المتجهين بدلالة قياسه الجبرى منسوبًا إلى متجه وحدة $\overleftarrow{\text{ى}}$ يوازيهما كالآتى :

$\overleftarrow{\text{ق}} = \text{ق}\ \overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ف}} = \text{ف}\ \overleftarrow{\text{ى}}$

وعندئذ ، يحسب الشغل ش كالآتى :

$\text{ش} = \overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{ف}} = (\text{ق}\ \overleftarrow{\text{ى}}) \odot (\text{ف}\ \overleftarrow{\text{ى}})$

$= \text{ق ف}\ (\overleftarrow{\text{ى}} \odot \overleftarrow{\text{ى}})$

$\because \overleftarrow{\text{ى}} \odot \overleftarrow{\text{ى}} = ١$

$\therefore \boxed{\text{ش} = \text{ق ف}}$ (٣)

ونعبر عن هذه العلاقة بأنه : " إذا كان متجه القوة يوازى متجه الازاحة ، فأن الشغل المبذول يساوى حاصل ضرب قياسيهما الجبريين " .

وحدات قياس الشغل :

ينتج من التعريف مباشرة أن :

وحدة قياس الشغل = وحدة قياس مقدار القوة × وحدة قياس الطول

النيوتن – متر (نيوتن . متر) :

يعرف النيوتن –متر على أنه مقدار الشغل الذى تبذله قوة مقدارها نيوتن واحد فى تحريك جسم ما لمسافة متر واحد فى اتجاهها .

فإذا أخذنا $\| \overleftarrow{ق} \|$ = ١ نيوتن ، $\| \overleftarrow{ف} \|$ = ١ متر ، هـ = صفرْ

فى العلاقة (٢) فأننا نحصل على الآتى :

١ نيوتن . متر = ١ نيوتن × ١ متر .

ويطلق أيضا أسم " الجول " على وحدة النيوتن – متر .

الكيلو جرام – متر (ث . كجم . متر) يعرف الكيلو جرام – متر على أنه مقدار الشغل الذى تبذله قوة مقدارها ثقل كيلو جرام واحد فى تحريك جسم ما لمسافة متر واحد فى اتجاهها .

فإذا اخذنا $\| \overleftarrow{ق} \|$ = ١ ث . كجم ، $\| \overleftarrow{ف} \|$ = ١ متر ، هـ = صفرْ

فأن العلاقة (٢) تعطى :

١ ث . كجم ، متر = ١ ث . كجم × ١ متر

الإرج : يعرف الارج على انه مقدار الشغل الذى تبذله قوة مقدارها داين واحد فى تحريك جسم ما لمسافة سنتيمتر واحد فى اتجاهها .

إذا اخذنا $\| \overleftarrow{ق} \|$ = ١ داين ، $\| \overleftarrow{ف} \|$ = ١ سم ، هـ = صفرْ

فأن العلاقة (٢) تعطى :

١ إرج = ١ داين × ١ سم

وإليك قواعد التحويل بين مختلف وحدات الشغل :

١ ث كجم . متر = ١ ث . كجم × ١ متر

= ٩٫٨ نيوتن × ١ متر

= ٩٫٨ نيوتن . متر (أو جول) .

١ نيوتن . متر (أو جول) = ١ نيوتن × ١ متر = $١٠^{٥}$ داين × $١٠^{٢}$ سم

= $١٠^{٧}$ داين × سم

= $١٠^{٧}$ إرج

مثال (٣) :

احسب الشغل الذى تبذله قوة الوزن عند صعود رجل كتلته ٨٠ كجم على طريق يعمل على الأفقى بزاوية قياسها °٣٠ وطوله ١٠٠ متر .

الحل

نطبق العلاقة (٢) مع ملاحظة أن

$\|\overleftarrow{\text{ق}}\|$ = ك ء = ٨٠ ث . كجم

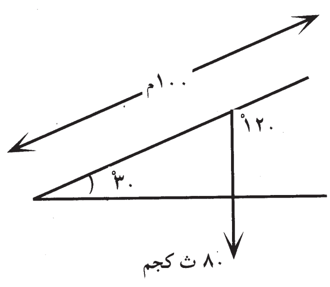
$\|\overleftarrow{\text{ف}}\|$ = ١٠٠ متر

هـ = °١٢٠ شكل (٦٠)

∴ ش = ٨٠ × ١٠٠ × جتا °١٢٠

= ٨٠ × ١٠٠ × $-\frac{١}{٢}$

= - ٤٠٠٠ ث . كجم . متر



(شكل ٦٠)

مثال (٤) :

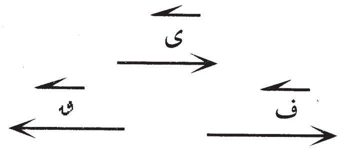
يتحرك جسيم على خط مستقيم وكانت تؤثر عليه قوة مقاومة تساوى فى المقدار ١٠٠ نيوتن . أحسب الشغل الذى تبذله هذه القوة خلال أزاحة معيارها ٣٠٠ متر .

الحل

بما أن القوة هى قوة مقاومة ، إذن فهى تعمل فى عكس اتجاه متجه الإزاحة ، وإذا كان $\overleftarrow{\text{ى}}$

متجه وحدة فى اتجاه الإزاحة ، فإنه يمكن التعبير عن كل من الازاحة والقوة بالقياسات الجبرية .

$\overleftarrow{ف} = \overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ق} = $ ق $\overleftarrow{ى}$



(شكل ٦١)

فى حالتنا :

ف = + ٣٠٠ متر ، ق = - ١٠٠ نيوتن

شكل (٦١)

∴ ش = ق ف

= (- ١٠٠) × (٣٠٠)

= - ٣ × ١٠ ^{٤} نيوتن . متر

= - ٣ × ١٠ ^{٤} جول

مثال (٥) :

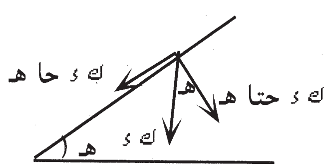
يتحرك جسيم كتلته ك على خط أكبر ميل لمستو يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ . أحسب الشغل الذى تبذله قوة الوزن عندما يتحرك الجسيم مسافة ل .

أولا : صاعداً المستوى. ثانيا : هابطًا المستوى .

الحل

ليكن ء مقدار عجلة الجاذبية الأرضية قوة الوزن هى قوة مقدارها (ك ء) وتعمل رأسيا لأسفل .

نحلل هذه القوة فى اتجاهين متعامدين ، أحدهما مواز لخط أكبر ميل والثانى عمودى عليه وفى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل . كما فى شكل (٦٢) .



(شكل ٦٢)

أما مركبة قوة الوزن فى الاتجاه الأول فمقدارها (ك ء جا هـ) وتعمل موازية لخط أكبر ميل ولأسفل .

وأما مركبة قوة الوزن فى الاتجاه الثانى ، فمقدارها (ك ء جتا هـ) وتعمل عمودية على خط أكبر ميل

إذا كانت $\overleftarrow{و}$ هى قوة الوزن ، $\overleftarrow{و_{١}}$ ، $\overleftarrow{و_{٢}}$ المركبتين المذكورتين أعلاه .

فإن : $\overleftarrow{و} = \overleftarrow{و_{١}} + \overleftarrow{و_{٢}}$

نعتبر حركة الجسيم على خط أكبر ميل وليكن $\overleftarrow{ف}$ متجه إزاحته .

الشغل المبذول بواسطة قوة الوزن هو :

$$ش = \overleftarrow{و} \odot \overleftarrow{ف} = (\overleftarrow{و_{١}} + \overleftarrow{و_{٢}}) \odot \overleftarrow{ف}$$

$$= \overleftarrow{و_{١}} \odot \overleftarrow{ف} + \overleftarrow{و_{٢}} \odot \overleftarrow{ف}$$

ولكن $\overleftarrow{و_{٢}} \odot \overleftarrow{ف}$ = صفر لأن المركبة $\overleftarrow{و_{٢}}$ عمودية على متجه الازاحة .

$$\therefore ش = \overleftarrow{و_{١}} \odot \overleftarrow{ف}$$

أى أن الشغل المبذول بواسطة قوة الوزن يساوى الشغل المبذول بواسطة المركبة الموازية لخط أكبر ميل .

نعتبر الآن حالتى الصعود والهبوط

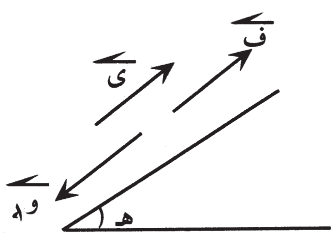
أولا – إذا كان الجسم صاعدا :

نأخذ متجه وحدة $\overleftarrow{ى}$ موازيًا لخط أكبر ميل وموجها لأعلى المستوى كما فى شكل (٦٣) يمكن التعبير عن كل من المتجهين $\overleftarrow{ف}$ ، $\overleftarrow{و_{١}}$

بواسطة قياسهما الجبرى كالآتى :

$$\overleftarrow{ف} = ل \overleftarrow{ى} ، \overleftarrow{و_{١}} = (ك ء حا هـ) \overleftarrow{ى}$$

$$\therefore ش = ل \overleftarrow{ى} \odot (- ك ء حا هـ) \overleftarrow{ى}$$



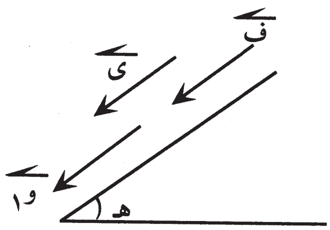
(شكل ٦٣)

= - ك ء ل جا هـ ($\overleftarrow{ى} \odot \overleftarrow{ى}$)

= - ك ء ل جا هـ

ثانيا : إذا كان الجسم هابطًا :

نأخذ متجه وحدة $\overleftarrow{ى}$ موازيا لخط أكبر ميل وموجها لأسفل كما فى شكل (٦٤) .



(شكل ٦٤)

فى هذه الحالة :

$\overleftarrow{ف}$ = ل $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{و_١}$ = (ك ء حا هـ) $\overleftarrow{ى}$

∴ ش = ل $\overleftarrow{ى}$ $\odot$ (ك ء حا هـ) $\overleftarrow{ى}$

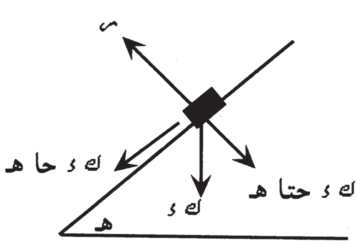
= ك ء ل جا هـ ($\overleftarrow{ى} \odot \overleftarrow{ى}$)

= ك ء ل جا هـ

مثال (٦) :

مستوى مائل أملس يميل على الافقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٩٨}$ قذف عليه جسم كتلته ٢ كيلو جرام فى اتجاه خط اكبر ميل للمستوى وإلى أعلى بسرعة ١,٤ م / ث . إحسب الشغل المبذول من الوزن حتى يسكن الجسم لحظيًا .

الحل



(شكل ٦٥)

الجسم يتحرك لاعلى بتقصير منتظم مقداره = ء حا هـ

أى أن حـ = -٩,٨ × $\frac{١}{٩٨}$ = -٠,١ متر / ث^{٢}

∴ ع^{٢} = ع^{٢} + ٢ حـ ف

= $(١,٤)^{٢}$ - ٢ × ٠,١ × ف

∴ ف = $\frac{(١,٤)^{٢}}{٠,٢}$ = ٩,٨ متر

الشغل المبذول = − ك ء حا هـ × ف

= −٢ × ٩٫٨ × $\frac{١}{٩٨}$ × ٩٫٨

= − ١٫٩٦ نيوتن . متر

تمارين (٤ – ١)

(١) يتحرك جسيم فى خط مستقيم من النقطة أ = (−١ ، −٢) إلى النقطة ب = (١ ، −٣) تحت تأثير قوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = − $\overleftarrow{\text{س}}$ − $\frac{١}{٢}$ $\overleftarrow{\text{ص}}$ ،والتحليل منسوب إلى اتجاهين متعامدين و $\overleftarrow{\text{س}}$ ، و $\overleftarrow{\text{ص}}$ ، $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجها وحدة فى هذين الاتجاهين ، احسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة .

(٢) أثرت القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = − ٤ $\overleftarrow{\text{س}}$ على جسيم فحركته من نقطة الأصل و= (٠ ، ٠) إلى النقطة أ (٢ ، ٠) على خط مستقيم ، ثم إلى النقطة ب = (٧ ، ٢) على خط مستقيم أيضا ، أحسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة خلال كل من الازاحتين ، ثم اثبت أن مجموع الشغلين يساوى الشغل المبذول على الازاحة المحصلة .

(٣) شدت عربة ترام بحبل أفقى يميل على خط الترام بزاوية قياسها ٦٠° فتحركت مسافة ١٥مترا، إذا كان الشد فى الحبل يساوى ١٥٠ ث. كجم ، أوجد الشغل الذى بذلته قوة الشد بالارج.

(٤) تحرك رجل صاعداً طريقا مستقيما يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° لمسافة ٣٠٠ متر ثم عاد أدراجه إلى نقطة البداية . احسب الشغل الذى بذلته قوة الوزن خلال الرحلة الكلية ، واذا كانت قوة المقاومة لحركة الرجل تساوى ٢ ث. كجم طوال حركته ، عين الشغل الذى بذلته هذه القوة خلال الرحلة الكلية .

(٥) اثرت قوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ = ٢ $\overleftarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ص}}$ على جسيم فكان متجه موضع الجسيم عند لحظة زمنية تتعين من العلاقة $\overleftarrow{\text{ر}}$ = (ن + ٥) $\overleftarrow{\text{س}}$ + (ن^{٢} + ٤) $\overleftarrow{\text{ص}}$ حيث $\overleftarrow{\text{س}}$ ، $\overleftarrow{\text{ص}}$ متجها الوحدة الاساسيين ، معيار $\overleftarrow{\text{ق}}$ بالنيوتن ووحدة المسافة بالمتر ، أحسب الشغل المبذول من القوة من ن = ١ إلى ن = ٥

(٦) تحرك جسيم صاعداً على خط أكبر ميل لمستوٍ يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° لمسافة

٤٠٠ سم تحت تأثير قوة مقدارها ٤٠ نيوتن تقع فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل وتميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها °٦٠ . أحسب الشغل المبذول .

(٧) جسم كتلته ٢ كجم موضوع على مستو مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها °٣٠ ، أوجد مقدرا بالجول الشغل الذى تبذله قوة الوزن عندما يتحرك الجسم مسافة ٥ أمتار على خط أكبر ميل لأسفل .

* استخدم القياسات الجبرية فى حل التمارين الآتية :

(٨) يتحرك جسيم فى خط مستقيم تحت تأثير قوة مقدارها ٤٠٠ داين وتعمل فى اتجاه الحركة ، احسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة خلال ازاحة مقدارها ٣٠٠ سم .

(٩) أوجد الشغل الذى تبذله قوة الوزن عند رفع جسم كتلته ٤ طن رأسيا لمسافة ١٢ مترا .

(١٠) أوجد الشغل المبذول فى تحريك كتلة مقدارها ١٠٠ جرام مسافة ١٥٠ سم بعجلة مقدارها ٥ سم / ث^{٢}

(١١) سيارة كتلتها ٦ طن تصعد منحدرا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ ضد مقاومات تعادل ١٠ ث . كجم لكل طن من كتلة السيارة فاكتسبت سرعة مقدارها ٦٣ كم /ساعة فى $١٢\frac{١}{٢}$ ثانية ، احسب الشغل المبذول من هذه القوة .

أولا : من قوة محرك السيارة . ثانيا : من قوى المقاومات .

ثالثا : من وزن السيارة . رابعا : ضد وزن السيارة .

(١٢) وضع جسم عند قمة مستوى مائل خشن ارتفاعه متر فانزلق ووصل إلى قاعدة المستوى بسرعة ١٨٠ متر / دقيقة فإذا كانت كتلة ١٠٠ جم فأحسب الشغل المبذول ضد الاحتكاك .

(١٣) تحرك جسم كتلته ١٤ كيلو جرام من حالة السكون على طريق أفقى تحت تأثير قوة $\overleftarrow{ق}$ مقدارها ٢ ث . كجم وتميل على الافقى بزاوية قياسها °٦٠ لأعلى ضد مقاومة مقدارها ٠.٩٥ ث كجم . أوجد بالجول الشغل المبذول خلال الدقيقة الاولى بواسطة كل من :

أولا : وزن الجسم. ثانيا : القوة $\overleftarrow{ق}$ ثالثا : المقاومة

القدرة : Power

عندما تبذل القوة شغلا على مسار ما ، أى خلال فترة زمنية معينة ، فإن هذا الشغل لا يبذل عادة بانتظام ، بمعنى أنه ليس من الضرورى أن تبذل القوة مقادير متساوية من الشغل خلال فترات زمنية متساوية .

ويصبح إذن من المهم أن نتساءل عن " المعدل الزمنى لبذل الشغل بواسطة هذه القوة " .

تعريف :

القدرة هى المعدل الزمنى لبذل الشغل

ويصاغ هذا التعريف أيضًا كالآتى :

" القدرة هى الشغل المبذول فى وحدة الزمن " .

وبما أن المعدل الزمنى لبذل الشغل يعطى بمشتقة دالة الشغل بالنسبة للزمن ، إذاً :

$$\boxed{\text{القدرة} = \frac{\text{د ش}}{\text{د ن}}} \qquad (1)$$

ستقتصر دراستنا التالية على حركة الجسيم فى خط مستقيم ، وسنفرض أن القوة التى نحسب قدرتها توازى هذا الخط المستقيم .

لذلك ، فإنه يمكن التعبير عن أى من متجهات الازاحة والسرعة والقوة بدلالة قياسه الجبرى منسوبًا إلى متجه وحدة $\vec{\text{ى}}$ مواز للخط المستقيم الذى تحدث عليه الحركة :

ليكن $\vec{\text{ف}} = \text{ف}\ \vec{\text{ى}}$ ، $\vec{\text{ع}} = \text{ع}\ \vec{\text{ى}}$ ، $\vec{\text{ق}} = \text{ق}\ \vec{\text{ى}}$

$\therefore$ ش = ق ف

$\therefore$ $\text{القدرة} = \frac{\text{د}}{\text{د ن}}\ (\text{ق ف})$

ولكن ق كمية ثابتة (لأن متجه القوة بالفرض) ويمكن إخراجها من تحت علامة المشتقة .

$\therefore$ $\text{القدرة} = \text{ق}\ \frac{\text{د ف}}{\text{د ن}}$

وبما أن $\frac{د ف}{د ن}$ = ع = القياس الجبرى لمتجه السرعة .

∴ $\boxed{\text{القدرة} = ق\ ع}$ (٢)

أى أن " القدرة تساوى حاصل ضرب القياسين الجبريين لمتجهى القوة والسرعة " .

تبين العلاقة (٢) أن القدرة كمية قياسية تتعين عند كل لحظة زمنية بمعلومية متجهى القوة والسرعة (أو بمعلومية قياسيهما الجبريين) عند هذه اللحظة ، وتحدد قيمتها المعدل الزمنى لبذل الشغل .

ملاحظة :

من المهم أن يلاحظ الطالب أن القدرة تتعين عند لحظة زمنية ، خلافا للشغل الذى يحسب دائمًا بين لحظتين زمنيتين .

وحدات قياس القدرة :

بما أن القدرة تساوى المعدل الزمنى لبذل الشغل .

∴ $\text{وحدة قياس القدرة} = \frac{\text{وحدة قياس الشغل}}{\text{وحدة قياس الزمن}}$

ويمكن أيضا تحديد وحدة قياس القدرة بناء على العلاقة (٢) كالآتى :

$\boxed{\text{وحدة قياس القدرة} = \text{وحدة قياس القوة} \times \text{وحدة قياس السرعة}}$

النيوتن – متر / ثانية (نيوتن . متر / ث) : يعرف النيوتن – متر / ثانية على أنه قدرة قوة تبذل شغلا بمعدل زمنى ثابت مقداره نيوتن – متر واحد فى كل ثانية .

ويطلق أيضا على وحدة النيوتن – متر / ثانية إسم " الوات "

ثقل كيلو جرام . متر / ثانية (ث . كجم . متر / ث) : يعرف ثقل كيلو جرام . متر / ثانية على أنه قدرة قوة تبذل شغلا بمعدل زمنى ثابت مقداره كيلو جرام– متر واحد فى كل ثانية .

الإرج / ثانية (إرج / ث) : يعرف الإرج / ثانية على أنه قدرة قوة تبذل شغلا بمعدل زمنى ثابت مقداره إرجا واحدا فى كل ثانية .

وإليك قواعد التحويل بين مختلف وحدات القدرة .

١ ث كجم . متر / ث = ٩,٨ نيوتن . متر / ث

١ نيوتن . متر / ث = ١ وات = $١٠^{٧}$ إرج/ ث

كما أن هناك وحدات أخرى للقدرة مثل الكيلو وات والحصان .

١ كيلو وات = ١٠٠٠ وات = ١٠٠٠ نيوتن . متر / ث

= $١٠^{١٠}$ إرج/ ث

، ١ حصان = ٧٥ ث كجم. متر / ث

= ٧٥ × ٩,٨ نيوتن . متر/ ث

= ٧٣٥ نيوتن. متر / ث (أو وات)

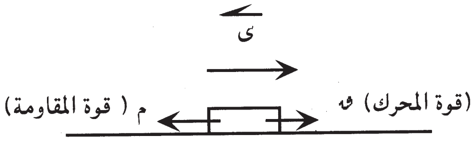
= ٠,٧٣٥ كيلو وات

مثال (١) :

يتحرك قطار كتلته ٢٠٠ طن وقدره محركه ٤٠٠ حصان فى خط مستقيم على أرض أفقية بأقصى سرعة ومقدارها ٥٤ كم/ س . أوجد مقدار مقاومة الطريق لحركته وكذلك مقدار المقاومة لكل طن من كتلته .

الحل

نختار متجه وحدة $\overleftarrow{ى}$ فى اتجاه حركة القطار ، أى فى اتجاه القوة التى يولدها محركه .



(شكل ٦٦)

تؤثر أفقيا على القطار قوتان :

– القوة التى يولدها المحرك واتجاهها هو اتجاه الحركة ، أى اتجاه $\overleftarrow{ى}$.

ليكن ق مقدار هذه القوة وهو فى الوقت نفسه قياسها الجبرى بالنسبة للمتجه $\overleftarrow{\text{ى}}$.

قوة المقاومة لحركة القطار وهى ناشئة عن عوامل طبيعية مثل ملامسة عجلات القطار للقضيب ومقاومة الهواء وسنطلق عليها إسم " مقاومة الطريق للحركة " وتكون هذه القوة موجهة فى عكس اتجاه الحركة وليكن م مقدارها .

بما أن القطار يتحرك حركة منتظمة (مقدار السرعة ثابت ويساوى السرعة القصوى) .

$\therefore$ م = ق

يمكننا الآن تعيين قيمة ق بمعلومية قدرة المحرك كالآتى :

نعبر أولا عن القدرة بوحدات ث كجم . متر/ ث

القدرة = ٤٠٠ حصان = ٤٠٠ × ٧٥ = ٣٠٠٠٠ ث كجم . متر/ ث

أما معيار متجه السرعة (ويساوى فى الوقت نفسه قياسه الجبرى) فهو

ع = ٥٤ كم / س

$= ٥٤ \times \frac{٥}{١٨} = ١٥$ متر/ ث

$\because$ القدرة = ق ع

$\therefore \text{ق} = \frac{\text{القدرة}}{\text{ع}} = \frac{٣٠٠٠٠}{١٥} = ٢٠٠٠$ ث كجم

$\therefore$ مقدار المقاومة هو

م = ق = ٢٠٠٠ ث كجم

$\therefore$ مقدار المقاومة لكل طن من كتلة القطار = $\frac{\text{مقدار المقاومة}}{\text{كتلة القطار}}$

$= \frac{٢٠٠٠}{٢٠٠} = ١٠$ ث . كجم

مثال (٢) :

تتحرك سيارة كتلتها ١٧١٠ كجم وقدرة محركها ١٢ حصان على طريق مستقيم أفقى بأقصى سرعة وقدرها ٧٢ كم / س . ما هى أقصى سرعة يمكن لهذه السيارة أن تصعد بها طريقًا مستقيمًا منحدراً يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ علما بأن المقاومة واحدة على الطريقين ؟

الحل

أولا - الحركة على الطريق الأفقى :

ليكن ق مقدار القوة التى يولدها محرك السيارة على الطريق الأفقى ، م مقدار قوة مقاومة الطريق للحركة .

بما أن الحركة منتظمة : ∴ م = ق

القدرة = ١٢ حصان = ١٢ × ٧٥ = ٩٠٠ ث كجم . متر/ ثانية

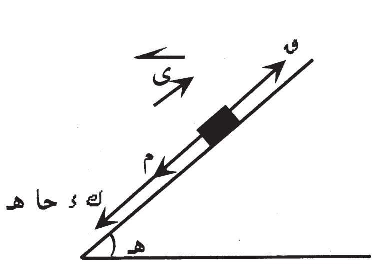
ع = ٧٢ كم / س = ٧٢ × $\frac{٥}{١٨}$ = ٢٠ متر/ ث

∴ ق = $\frac{\text{القدرة}}{\text{ع}}$ = $\frac{٩٠٠}{٢٠}$ = ٤٥ ث كجم

∴ م = ٤٥ ث كجم

ثانيا - الحركة على الطريق المائل :

ليكن هـ قياس زاوية ميل الطريق على الأفقى نختار متجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ فى اتجاه الحركة كما فى شكل (٦٧)



(شكل ٦٧)

ليكن ق$_١$ مقدار القوة التى يولدها محرك السيارة على الطريق المائل (ويساوى فى الوقت نفسه قياسه الجبرى) ، م$_١$ مقدار المقاومة الكلية ،

$ع_1$ اقصى سرعة (ويساوى أيضا القياس الجبرى لمتجه السرعة) .

تتكون المقاومة من :

قوة مقاومة الطريق ، وتساوى ٤٥ ث كجم

مركبة قوة الوزن وتعمل فى عكس اتجاه الحركة ويساوى مقدارها

$$ك \, ء \, جا \, هـ = ١٧١٠ \times \frac{١}{١٠} = ١٧١ \text{ ث كجم}$$

$$\therefore م_1 = ٤٥ + ١٧١ = ٢١٦ \text{ ث كجم}$$

بما أن الحركة منتظمة

$$\therefore ق_1 = م_1 = ٢١٦ \text{ ث كجم}$$

ولكن قدرة المحرك هى نفسها كما فى حالة الحركة على الطريق الأفقى .

$$\therefore \text{القدرة} = ق_1 \, ع_1 = ٩٠٠ \text{ ث كجم . متر/ ث}$$

$$\therefore ع_1 = \frac{\text{القدرة}}{ق_1} = \frac{٩٠٠}{٢١٦} = \frac{٢٢٥}{٥٤} \text{ متر / ث}$$

$$= \frac{٢٢٥}{٥٤} \times \frac{١٨}{٥} \text{ كم/ س}$$

$$= ١٥ \text{ كم / س}$$

مثال (٣) :

تطير طائرة فى مسار أفقى تحت تأثير مقاومة تتناسب مع مربع سرعتها . فإذا كان مقدار المقاومة ٦٠٠ ث كجم عندما كانت سرعة الطائرة ٢٠٠ كم /س وكانت أقصى سرعة للطائرة ٣٠٠ كم /س احسب قدرة محركها بالحصان .

الحل

ليكن $م_1$ ، $م_2$ مقدارى المقاومة عند السرعتين ٢٠٠ ، ٣٠٠ كم/ س على الترتيب ، أ ثابت

التناسب بين مقدار المقاومة ومربع السرعة .

$\therefore$ م$_١$ = أ × (٢٠٠)^٢ ، م$_٢$ = أ × (٣٠٠)^٢

$$\therefore \quad \frac{م_٢}{م_١} = \frac{(٣٠٠)^٢}{(٢٠٠)^٢} = \frac{٩}{٤}$$

ولكن م$_١$ = ٦٠٠ ث كجم

$$\therefore م_١ = \frac{٩}{٤} \times ٦٠٠ = ١٣٥٠ \text{ ث كجم}$$

= مقدار القوة التى يولدها المحرك عند أقصى سرعة

$$ع = ٣٠٠ \times \frac{٥}{١٨} = \frac{٢٥٠}{٣} \text{ متر / ث}$$

القدرة = ق × ع

$$= ١٣٥٠ \times \frac{٢٥٠}{٣} \text{ ث كجم . متر / ث}$$

$$= \frac{١٣٥٠ \times ٢٥٠}{٣ \times ٧٥} = ١٥٠٠ \text{ حصان}$$

مثال (٤) :

تحركت سيارة كتلتها ٦ طن بأقصى سرعة وقدرها ٢٧ كم / س صاعدة طريق منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ ، عادت السيارة وهبطت على الطريق نفسه بأقصى سرعة لها وقدرها ١٣٥ كم / س . عين مقدار قوة مقاومة الطريق للحركة بفرض أنه لم يتغير طوال الوقت ثم أوجد قدرة محرك السيارة .

الحل

أولا : مرحلة الصعود

نأخذ متجه $\overleftarrow{ى}$ فى اتجاه الحركة وليكن هـ قياس زاوية ميل الطريق على الأفقى .

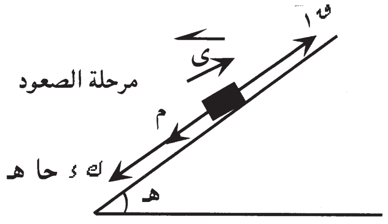
، ق$_١$ مقدار القوة التى يولدها المحرك أثناء الصعود (ويساوى فى الوقت نفسه القياس

الجبرى لهذه القوة) .

م مقدار مقاومة الطريق للحركة كما فى شكل (٦٨ - أ)

تتكون قوة المقاومة الكلية من قوة مقاومة الطريق م ومن مركبة قوة الوزن وهى فى عكس اتجاه الحركة

ومقدارها ك ء جا هـ = ٦٠٠٠ × $\frac{١}{١٠}$ = ٦٠ كجم



(شكل ٦٨ - أ)

بما أن الحركة منتظمة ∴ ق$_١$ = م + ٦٠

أما مقدار السرعة (ويساوى فى الوقت نفسه القياس الجبرى لمتجه السرعة) فهو

ع$_١$ = ٢٧ كم / س = ٢٧ × $\frac{٥}{١٨}$ متر / ث

قدرة المحرك : القدرة = ق$_١$ ع$_١$ = (م + ٦٠) × ٢٧ × $\frac{٥}{١٨}$ ث كجم . متر / ث

ثانيا : مرحلة الهبوط :

يأخذ متجه وحدة ى فى اتجاه الحركة وليكن ق$_٢$ مقدار القوة التى يولدها المحرك أثناء الهبوط (ويساوى فى الوقت نفسه القياس الجبرى لهذه القوة) كما فى شكل (٦٨ - ب) .

نلاحظ أن مركبة الوزن الموازية للطريق تكون فى اتجاه حركته ، أى أنها تساعد قوة المحرك بما أن الحركة منتظمة : ∴ ق$_٢$ + ٦٠ = م

∴ ق$_٢$ = م - ٦٠

أما مقدار السرعة (ويساوى فى الوقت نفسه القياس الجبرى لمتجه السرعة) فهو

ع$_٢$ = ١٣٥ كم / س = ١٣٥ × $\frac{٥}{١٨}$ متر / ث

قدرة المحرك : القدرة = ق$_٢$ ع$_٢$

= (م - ٦٠) × ١٣٥ × $\frac{٥}{١٨}$ متر / ث

بمساواة قيمتى القدرة التى حصلنا عليهما فى مرحلتى الصعود والهبوط نجد

$$(م + ٦٠) \times ٢٧ \times \frac{٥}{١٨} = (م - ٦٠) \times ١٣٥ \times \frac{٥}{١٨}$$

$\therefore$ م + ٦٠ = ٥ (م − ٦٠)

$\therefore$ م = ٩٠ ث كجم

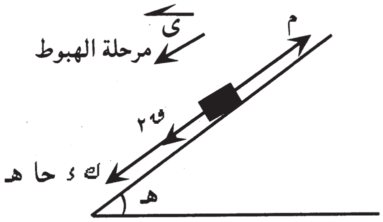
بالتعويض فى العلاقة التى تعطى القدرة نجد :

$$\text{القدرة} = (م - ٦٠) \times ١٣٥ \times \frac{٥}{١٨}$$

$$= (٩٠ - ٦٠) \; ١٣٥ \times \frac{٥}{١٨}$$

= ١١٢٥ ث كجم . متر / ث

$$= \frac{١١٢٥}{٧٥} = ١٥ \text{ حصانا}$$



(شكل ٦٨ - ب)

مثال (٥) :

سيارة كتلتها طن واحد تتحرك بسرعة منتظمة مقدارها ٥٤ كيلو متر / ساعة على طريق أفقى . إذا صعدت بنفس سرعتها السابقة طريقًا يميل على الافقى بزاوية جيب قياسها $\frac{١}{٥٠}$ فأوجد الزيادة فى قدرة محرك السيارة بالحصان بفرض أن المقاومة واحدة على الطريقين .

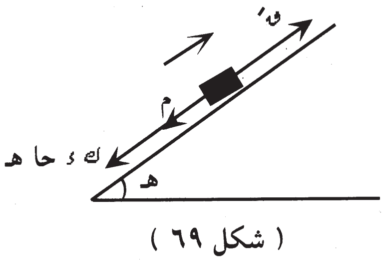
الحل

أولا – الحركة فى المستوى الأفقى : ق = م

$$\text{القدرة أولاً} = ق \times ع = م \times ٥٤ \times \frac{٥}{١٨} = ١٥ \text{ م ث كجم . متر / ث}$$

ثانيا – الحركة على المستوى المائل :

$$ق' = م + ١٠٠٠ \times \frac{١}{٥٠} = م + ٢٠ \text{ ث . كجم}$$



(شكل ٦٩)

∴ القدرة ثانيًا = (م + ٢٠) × ١٥ ث . كجم . متر / ث

∴ الزيادة فى القدرة = ١٥ م + ٣٠٠ - ١٥م = ٣٠٠ ث كجم . متر / ث

= ٤ حصان .

تمارين (٤ - ٢)

(١) يتحرك جسم كتلته الوحدة وكان متجه ازاحته $\overleftarrow{ف}$ كدالة فى الزمن هو

$\overleftarrow{ف} = ن \overleftarrow{س} + (\frac{٥}{٢} ن^٢ - ٣ ن) \overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان وكان الجسم يتحرك تحت تأثير قوة

$\overleftarrow{ق} = ٣ \overleftarrow{س} + ٤ \overleftarrow{ص}$ أوجد $\frac{ء}{ء ن} (\overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ف})$ عندما ن = ٣ ثوان .

(٢) أوجد بالكيلو وات وبالحصان قدرة سيارة كتلتها ٢ طن حينما تتحرك بسرعة ٥٠ كم / س على طريق أفقى ، علمًا بأن القوة المقاومة تعادل ٠,٠٥ من وزن السيارة .

(٣) يتحرك قطار كتلته ٢٥٠ طنا على شريط أفقى بسرعة منتظمة ٣٠ كم / س أوجد قدرة آلة القطار علمًا بأن مقاومة الطريق تساوى ٩ ث كجم لكل طن من كتلته .

(٤) يتحرك قطار كتلته ٢٠٠ طن وقدرة آلته ٣٠٠ حصان على شريط أفقى . أوجد أقصى سرعة للقطار علمًا بأن مقدار المقاومة يساوى ٠,٠١٥ من وزنه .

(٥) تتحرك شاحنة كتلتها ٤ طن وقدرة محركها ٢٠ حصانا أعلى طريق منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢٠}$ ما هى أقصى سرعة لها على هذا الطريق علما بأن مقدار مقاومة الطريق للحركة هو ٢٥ ث كجم عن كل طن من وزن السيارة .

(٦) يتحرك قطار كتلته ٢٠٠ طن على طريق أفقى بأقصى سرعة ومقدارها ٩٠ كم / س وكانت

قوة المقاومة لحركته ١٠ ث كجم لكل طن من كتلته . بدأ هذا القطار فى صعود طريق يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ أوجد أقصى سرعة للقطار على الطريق المائل - علما بأن قوة المقاومة لم يتغير .

(٧) إذا كانت السرعة القصوى لدراجة على طريق أفقى هى ٢٤ كم / س ، فما هى المقاومة التى تلاقيها ، علما بأن قدرة راكب الدراجة هى $\frac{١}{٥}$ حصان . وإذا كانت كتلة الرجل ودراجته ٧٢ كجم ، فما هى أقصى سرعة يمكن أن تصعد بها الدراجة طريقا منحدرا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٦}$ إذا لم تتغير مقاومة الطريق للحركة .

(٨) تجر قاطرة قدرة آلتها ٤٠٠ حصان قطارا بسرعة ٧٢ كم / س على أرض أفقية . إحسب المقاومة لحركة القطار ، إذا كانت كتلة القطار والقاطرة معا ٢٠٠ طن ، أوجد أقصى سرعة يصعد بها القطار طريقا منحدرا يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢٠٠}$ على فرض أن مقاومة الطريق للحركة لم تتغير .

(٩) تطير طائرة قدرة محركها ٦٠٠ حصان تحت تأثير مقاومة تتناسب مع مربع سرعتها ، فإذا كانت أقصى سرعة للطائرة هى ٣٠٠ كم / س ، فما هو مقدار المقاومة عند سرعة ٢٠٠ كم / س ؟

(١٠) هبطت شاحنة كتلتها ٢ طن على طريق منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ من موقع أ إلى موقع ب بأقصى سرعة وقدرها ٤٥ كم / س .

إحسب قدرة محرك السيارة إذا علمت ان مقاومة الطريق لحركتها تقدر بنسبة ١٣ ٪ من وزن السيارة ، حملت السيارة عند وصولها إلى الموقع ب بشحنة كتلتها $\frac{١}{٢}$ طن ثم تحركت صاعدة الطريق الى الموقع أ بأقصى سرعة ، أوجد هذه السرعة إذا ظلت المقاومة على نفس نسبتها من الوزن .

(١١) محرك طائرة صغيرة يشتغل بمعدل ٢٥٠٠٠ ث كجم . متر / ث حينما تسير الطائرة بسرعة ٩٠ كم / ساعة فإذا كانت مقاومات الحركة للطائرة تتناسب مع مربع سرعتها ، فأوجد القدرة المبذولة عندما تسير الطائرة بسرعة ١٣٥ كم / ساعة فى نفس الظروف .

(١٢) سيارك كتلتها ٦ أطنان تصعد على مستوى يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ فإذا كانت مقاومة الهواء والاحتكاك تعادل ١٥ ث كجم لكل طن من الكتلة وكانت أقصى سرعة تتحرك بها السيارة عندئذ هى ٢٧ كم / ساعة . أحسب قدرة السيارة بالحصان - أحسب أيضا أقصى سرعة تتحرك بها السيارة وهى هابطة على المستوى بفرض أن كل من قدرة السيارة وكذا مقاومة الهواء والاحتكاك لم تتغير .

(١٣) تسير سيارة كتلتها ٢٫٧ طن على طريق أفقى بأقصى سرعة لها ١٠٠ كم / ساعة وعندما وصلت إلى منحدر يميل على الافقى بزاوية جيب قياسها $\frac{١}{٢٠}$ أوقف السائق المحرك فتحركت إلى أسفل المنحدر بنفس السرعة ، فأذا كانت المقاومة ثابتة ، فأوجد قدرة المحرك بالحصان .

طاقة الحركة : Kinetic Energy

تعريف :

تعرف طاقة حركة الجسيم على أنها حاصل ضرب كتلة الجسيم فى مربع معيار سرعته ونرمز لها بالرمز ط .

فإذا كنت ك كتلة الجسيم ، $\overleftarrow{ع}$ متجه سرعته ، ع القياس الجبرى لهذا المتجه

$$\boxed{ط = \frac{١}{٢} ك \, ||\overleftarrow{ع}||^{٢} = \frac{١}{٢} ك ع^{٢}} \qquad (١)$$

وبما أن $||\overleftarrow{ع}||^{٢} = \overleftarrow{ع} \odot \overleftarrow{ع}$ ، فإنه يمكن التعبير عن طاقة الحركة كالآتى :

$$\boxed{ط = \frac{١}{٢} ك \, (\overleftarrow{ع} \odot \overleftarrow{ع})} \qquad (٢)$$

يتضح من التعريف أن طاقة حركة الجسيم هى كمية قياسية غير سالبة ، وتنعدم فقط عندما ينعدم متجه السرعة . كما يبين التعريف أن طاقة حركة الجسيم قد تتغير من لحظة زمنية لأخرى أثناء حركته تبعاً لمقدار سرعته .

وحدات قياس طاقة الحركة :

ينتج من التعريف أن :

وحدة قياس طاقة الحركة = وحدة قياس الكتلة × (وحدة قياس مقدار السرعة)^{٢}

وبتفصيل أكثر :

$$\text{وحدة قياس طاقة الحركة} = \text{وحدة قياس الكتلة} \times \frac{\text{وحدة قياس الطول}}{\text{وحدة قياس الزمن}} \times \frac{\text{وحدة قياس الطول}}{\text{وحدة قياس الزمن}}$$

$$= \text{وحدة قياس الكتلة} \times \frac{\text{وحدة قياس الطول}}{(\text{وحدة قياس الزمن})^{٢}} \times \text{وحدة قياس الطول}$$

= وحدة قياس الكتلة × وحدة قياس العجلة × وحدة قياس الطول

= وحدة قياس مقدار القوة × وحدة قياس الطول

= وحدة قياس الشغل

∴ $\boxed{\text{وحدة قياس طاقة الحركة = وحدة قياس الشغل}}$

مما يبين أن طاقة الحركة لها نفس طبيعة الشغل .

فمثلاً ، إذا قيست الكتلة بالكيلو جرام ومقدار السرعة بالمتر/ ثانية فأن :

وحدة قياس طاقة الحركة = كجم × $\frac{\text{متر}}{\text{ث}}$ × $\frac{\text{متر}}{\text{ث}}$ = كجم $\frac{\text{متر}}{\text{ث}^{2}}$ × متر = نيوتن . متر

وإذا قيست الكتلة بالجرام ومقدار السرعة بالسنتيمتر / ثانية فأن :

وحدة قياس طاقة الحركة = جم × $\frac{\text{سم}}{\text{ث}}$ × $\frac{\text{سم}}{\text{ث}}$ = جم × $\frac{\text{سم}}{\text{ث}^{2}}$ × سم = داين × سم = إرج

يبين الجدول التالى قواعد استخدام وحدات قياس مختلف خصائص الحركة فى النظامين التاليين :

١- نظام «متر - كيلو جرام - ثانية ؛ (م . ك . ث)

فى هذا النظام تقاس الأطوال بالمتر والكتل بالكيلوجرام والأزمنة بالثانية .

٢- نظام «سنتيمتر- جرام - ثانية» (سم . ج . ث)

فى هذا النظام تقاس الأطوال بالسنتيمتر والكتل بالجرام والأزمنة بالثانية .

النظام	الزمن	الكتلة	السرعة	العجلة	القوة	الشغل أو طاقة الحركة	القدرة
م.ك .ث	ث	كجم	متر/ ث	متر/ث^{2}	نيوتن	نيوتن . متر (جول)	نيوتن متر/ث(وات)
سم.ج. ث	ث	جم	سم/ ث	سم/ث^{2}	داين	إرج	إرج/ ث

ملاحظة : عند العمل فى أى من النظامين السابقين ، على الطالب أن يستخدم الوحدات المناسبة الخاصة بالنظام الذى اختاره .

مثال (١) :

يتحرك جسم كتلته ١,٥ كجم بسرعة ١٢ متر / ث . أحسب قيمة طاقة حركته مقدرة بوحدتى النيوتن - متر والإرج .

الحل

بما أن الكتلة تقاس بوحدة كجم والسرعة بوحدة متر/ث

فأن طاقة الحركة تقدر بوحدة نيوتن . متر (أو جول) .

$\text{ط} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{١,٥} \times (\text{١٢})^{\text{٢}}$ نيوتن . متر

$=$ ١٠٨ نيوتن . متر (أو جول)

$= \text{١٠٨} \times \text{١٠}^{\text{٧}}$ إرج $= \text{١,٠٨} \times \text{١٠}^{\text{٩}}$ إرج

مثال (٢) :

إذا كانت طاقة حركة قذيفة مدفع عند لحظة زمنية ما تساوى ٢٢٥٠٠ جول ، فما هو مقدار سرعتها عندئذ علماً بأن كتلتها $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ كجم؟

الحل

$$\because\ \text{ط} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ك}\,\|\overleftarrow{\text{ع}}\|^{\text{٢}}$$

$$\therefore\ \text{٢٢٥٠٠} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \|\overleftarrow{\text{ع}}\|^{\text{٢}}$$

$$\therefore\ \|\overleftarrow{\text{ع}}\|^{\text{٢}} = \text{٢٢٥٠٠} \times \text{٤} = \text{٩٠٠٠٠}$$

$$\therefore\ \|\overleftarrow{\text{ع}}\| = \sqrt{\text{٩٠٠٠٠}} = \text{٣٠٠}\ \text{متر / ث}$$

مثال (٣) :

يتحرك جسم كتلته ٢٥٠ جم بسرعة ٢ متر/ ث . أحسب طاقة حركته .

الحل

فى هذا المثال ، علينا أن نسلك أحد طريقين : إما أن نحول الكتلة إلى وحدة كجم فنحصل على طاقة الحركة مقدرة بوحدة النيوتن – متر (أو الجول) أو أن نحول السرعة إلى وحدة سم /ث فنحصل على طاقة الحركة مقدرة بوحدة الإرج.

إذا اتبعنا الطريق الأول فأن :

ك = ٢٥٠ جم = ٠,٢٥ كجم

طاقة الحركة : ط = $\frac{١}{٢}$ × ٠,٢٥ × (٢)^{٢} = ٠,٥ جول

أما إذا اتبعنا الطريق الثانى ، فإن :

|| $\overleftarrow{ع}$ || = ٢ متر / ث = ٢٠٠ سم / ث

∴ ط = $\frac{١}{٢}$ × ٢٥٠ × (٢٠٠)^{٢} = ٥ × ١٠^{٦} أرج = ٠,٥ جول

ويتضح إذن أن الطريقتين متكافئتان ، وهو أمر متوقع بطبيعة الحال .

مثال (٤) :

يتحرك جسم كتلته ٨٠٠ جم . بسرعة تعطى بالعلاقة : $\overleftarrow{ع}$ = ١٢ $\overleftarrow{س}$ + ٥ $\overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة ثابتان ومتعامدان . أوجد طاقة حركة هذا الجسيم علماً بأن مقدار السرعة مقدر بوحدة سم / ث .

الحل

بما أن الكتلة مقاسة بوحدة جم والسرعة بوحدة سم /ث فإن طاقة الحركة تقدر بوحدة الإرج

|| $\overleftarrow{ع}$ ||^{٢} = (١٢)^{٢} + (٥)^{٢} = ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩

طاقة الحركة : ط = $\frac{١}{٢}$ ك || $\overleftarrow{ع}$ ||^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ٨٠٠ × ١٦٩ = ٦٧٦٠٠ إرج

مثال (٥) :

قذف جسم كتلته ٢٠٠ جرام بسرعة ٢٠٠ سم / ث على خط أكبر ميل لمس قياسها ٣٠ ْ ولأعلى . أوجد طاقة حركة هذا الجسم بعد إنقضاء ٣ ثوان من لحظة قذفه وكذلك التغير فى طاقة حركته .

الحل

ليكن $\overleftarrow{س}$ متجه وحدة مواز لخط أكبر ميل للمستوى ولأعلى شكل (٧٠) ولتكن عِ ، ع ،

جـ القياسات الجبرية بالنسبة للمتجه $\overleftarrow{س}$ لمتجهات السرعة الابتدائية والسرعة بعد انقضاء ٣ ثوان من لحظة القذف والعجلة على الترتيب .

نعرف أن جـ = - ء جا ٣٠°

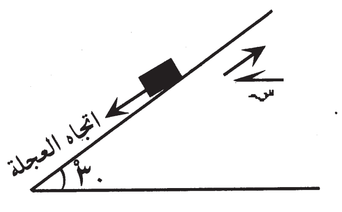
$= - ٩٨٠ \times \frac{١}{٢} = - ٤٩٠$ سم / ث^{٢}

أيضا ع. = ٢٠٠ سم / ث

لحساب ع نستخدم القانون : ع = ع. + جـ هـ

∴ ع = ٢٠٠ + (- ٤٩٠) × ٣

= - ١٢٧٠ سم / ث



(شكل ٧٠)

مما يبين أن الجسم كان يتحرك عندئذ لأسفل (فى عكس اتجاه المتجه $\overleftarrow{س}$)

ط = $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ (٢٠٠) × (- ١٢٧٠)^{٢}

≃ ١,٦ × ١٠^{٨} إرج .

لحساب التغير فى طاقة حركة الجسم يلزم حساب طاقة حركته الابتدائية .

ط. = $\frac{١}{٢}$ ك ع.^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ (٢٠٠) × (٢٠٠)^{٢}

= ٤ × ١٠^{٦} إرج ≃ ٠,٠٤ × ١٠^{٨} إرج

∴ التغير فى طاقة الجسم :

ط - ط. = ١,٥٦ × ١٠^{٨} إرج

تمارين (٤ – ٣)

(١) عين طاقة حركة قذيفة كتلتها $\frac{١}{٤}$ كجم و تتحرك بسرعة ٣٠٠ متر / ث .

(٢) أوجد طاقة حركة جسم كتلته ٥٠ جم ويتحرك بسرعة ٢٠ متر / ث .

(٣) أوجد طاقة حركة جسم كتلته ٢ كجم ويتحرك بسرعة ٢٥ سم / ث .

(٤) أوجد سرعة سيارة كتلتها ١,٥ طن إذا كانت طاقة حركتها تساوى ١٦٨٧٥٠ جول .

(٥) قارن بين طاقتى حركة رصاص كتلتها ٥٠ جم وتتحرك بسرعة ٣٠٠ متر/ ث وقاطرة كتلتها ٦,٤٨ طن وسرعتها ١ كم / س .

(٦) يتحرك جسم كتلته ٢٠٠ جرام بسرعة $\overrightarrow{\text{ع}}$ = ٣٠ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٤٠ $\overrightarrow{\text{ص}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجها وحدة متعامدان ومقدار السرعة مقاس بوحدة سم / ث . عين طاقة حركة هذا الجسم .

(٧) انطلقت قذيفة مقدارها ٣ كجم من مدفع بسرعة $\overrightarrow{\text{ع}}$ = – ٢٠٠٠ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٢٠٠٠ $\overrightarrow{\text{ص}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجها وحدة متعامدان ومقدار السرعة مقاس بوحدة سم / ث . عين طاقة حركة القذيفة لحظة انطلاقها.

(٨) يتحرك جسم بسرعة $\overrightarrow{\text{ع}}$= ٥٠٠ $\overrightarrow{\text{س}}$ +١٠٠ $\overrightarrow{\text{ص}}$ حيث $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ متجها وحدة متعامدان ومقدار السرعة مقاس بوحدة سم/ث. عين كتلة هذا الجسم علماً بأن طاقة حركته تساوى ٩,٣ جول .

(٩) ترك جسيم كتلته ٥٠ جم ليسقط من أرتفاع ١٠ أمتار من سطح الأرض . أحسب طاقة حركة هذا الجسيم عندما يكون على وشك الإرتطام بالأرض .

(١٠) قذف جسيم كتلته $\frac{١}{٢}$ كجم رأسياً لأعلى من نقطة على سطح الأرض بسرعة١٤,٧متر/ث أحسب طاقة حركة هذا الجسيم بعد مرور ثانية واحدة ثم بعد مرور ١,٥ثانية من لحظة القذف.

(١١) ترك جسيم كتلته ٢٠٠ جم ليتحرك من سكون من قمة مستوى أملس طوله ٢٥ متراً ويميل على الأفقى بزاوية جيب $\frac{١}{١٠}$ ، أوجد طاقة حركة هذا الجسيم عندما يصل إلى قاعدة المستوى .

(١٢) قذف جسيم كتلته ٥ كجم على خط أكبر ميل لمستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ ولأعلى بسرعة ٤ متر / ث . أحسب التغير الذى يطرأ على طاقة حركة هذا الجسيم بعد انقضاء ثانية واحدة على لحظة قذفه ثم عندما يعود إلى موضع القذف.

مبدأ الشغل والطاقة : Principle of work and energy

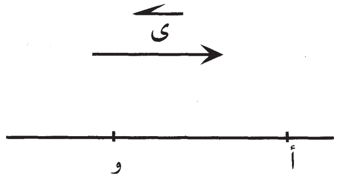
عرضنا فى البنود السابقة مفهوم الشغل وطاقة الحركة ونوضح فيما يلى العلاقة بينهما فى حالة حركة جسيم على خط مستقيم .

لذلك ، نعتبر حركة جسيم على خط مستقيم تحت تأثير قوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ موازية لهذا الخط وليكن

(و) موضع الجسيم عند اللحظة الابتدائية ن = صفر

(أ) موضع الجسيم عند اللحظة النهائية ن

ش الشغل المبذول بواسطة القوة $\overleftarrow{\text{ق}}$ خلال الانتقال من (و) إلى (أ) ، أى الشغل منذ بداية الحركة وحتى اللحظة الزمنية ن .



(شكل ٧١)

ط. طاقة الحركة الابتدائية للجسيم ، أى طاقة حركته عند الموضع (و) .

ط طاقة الحركة النهائية للجسيم ، أى طاقة حركته عند الموضع أ أيضاً ، ليكن $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة مواز للخط المستقيم الذى تحدث عليه الحركة ، ع ، جـ القياسين الجبريين لمتجهى السرعة والعجلة عند اللحظة النهائية ن على الترتيب ، ق القياس الجبرى لمتجه القوة بالنسبة لمتجه الوحدة $\overleftarrow{\text{ى}}$. لدينا :

$$\text{ط} = \frac{١}{٢}\ \text{ك}\ \text{ع}^{٢}$$

$$\therefore \frac{\text{د ط}}{\text{د ن}} = \frac{\text{د}}{\text{د ن}}\left(\frac{١}{٢}\ \text{ك ع}^{٢}\right) = \frac{١}{٢}\ \text{ك}\ \frac{\text{د}}{\text{د ن}}\ (\text{ع}^{٢})$$

$$= \frac{١}{٢}\ \text{ك} \times ٢\ \text{ع}\ \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}} = \left(\text{ك}\ \frac{\text{د ع}}{\text{د ن}}\right) \text{ع}$$

$$= (\text{ك جـ}) \times \text{ع}$$

من القانون الثانى لنيوتن

$$\text{ك جـ} = \text{ق}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{\text{د ط}}{\text{د ن}} = \text{ق ع}} \qquad (١)$$

أى أن « معدل التغير الزمنى لطاقة حركة الجسيم يساوى قدرة القوة المؤثرة عليه » من جهة أخرى ، نعلم أن :

$$\frac{ى\,ش}{ى\,ن} = ق\,ع$$

بمقارنة هذه العلاقة مع (١) نجد :

$$\frac{ى\,ط}{ى\,ن} = \frac{ى\,ش}{ى\,ن}$$

أو $\frac{ى}{ى\,ن}$ (ط − ش) = صفر

ولما كان انعدام المشتقة الزمنية للدالة (ط − ش) يعنى ان هذه الدالة تأخذ قيمة ثابتة عند كل الأزمنة فإن :

ط − ش = ثابت (٢)

نعين قيمة الثابت بأخذ قيمة الدالة (ط − ش) عند اللحظة الابتدائية ن = صفر

حيث كان ط = ط. ، ش = صفر (لم تكن القوة قد بذلت شغلاً بعد) .

∴ ط. = ثابت

بالتعويض بقيمة الثابت فى (٢) نجد :

ط − ش = ط.

أو $\boxed{\text{ط − ط. = ش}}$ (٣)

تعبر العلاقة الأخيرة عن مبدأ الشغل والطاقة والذى ينص على الاتى :

« التغير فى طاقة حركة الجسيم عند انتقاله من موضع ابتدائى إلى موضع نهائى يساوى الشغل المبذول بواسطة القوة المؤثرة عليه خلال الإزاحة بين هذين الموضعين» .

ويلاحظ أنه عند استخدام العلاقة (٣) يجب أن تكون وحدات قياس طاقة الحركة هى نفسها وحدات قياس الشغل .

نتيجة :

إذا بدأ جسيم حركته من موضع ما ثم عاد إلى نفس الموضع ، فإن طاقة حركته النهائية تساوى طاقة حركته الابتدائية.

البرهان :

بما أن الازاحة تمثل بالمتجه الصفرى ، فإن الشغل المبذول يساوى الصفر أيضًا .

$\therefore$ $\text{ط} - \text{ط}_{\text{.}} = \text{صفر}$ أى أن $\text{ط} = \text{ط}_{\text{.}}$ وهو المطلوب إثباته .

ملاحظة :

إذا طبقنا هذه النتيجة على حركة المقذوف الرأسى تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية الثابتة لوجدنا أن طاقة حركة المقذوف عند موضع ما أثناء مرحلة الصعود تساوى طاقة حركته عند نفس الموضع أثناء مرحلة الهبوط وينتج من ذلك أن مقدار السرعة فى الحالتين يكون واحداً .

مثال (١) :

استخدم القانون الذى يعطى السرعة بدلالة الزمن فى الحركة المنتظمة التغير لإيجاد طاقة حركة الجسيم المتحرك ومن ثم استنتج أن معدل التغير الزمنى لطاقة حركته يساوى قدرة القوة المسببة للحركة .

الحل

فى الحركة المستقيمة منتظمة التغير تعطى السرعة بدلالة الزمن من العلاقة :

$$\text{ع} = \text{ع}_{\text{.}} + \text{جـ}\,\text{ن}$$

حيث ن الزمن ، ع ، ع. ، جـ القياسات الجبرية لمتجهات السرعة عند اللحظة النهائية ن والسرعة عند اللحظة الابتدائية ن = صفر والعجلة على الترتيب بالنسبة لمتجه وحدة يوازى الخط المستقيم الذى تحدث عليه الحركة .

$$\therefore \text{ط} = \frac{١}{٢}\,\text{ك}\,\text{ع}^{٢} = \frac{١}{٢}\,\text{ك}\,(\text{ع}_{\text{.}} + \text{جـ}\,\text{ن})^{٢}$$

$$\therefore \frac{\text{د ط}}{\text{د ن}} = \frac{١}{٢}\,\text{ك} \times ٢\,(\text{ع}_{\text{.}} + \text{جـ}\,\text{ن})\,\text{جـ}$$

$= ك\, جـ \times (ع_{.} + جـ\, ن) = ك\, جـ\, ع$

ولكن ك جـ = ق حيث ق القياس الجبرى لمتجه القوة .

$\therefore \frac{ى\, ط}{ى\, ن} = ق\, ع =$ قدرة القوة المسببة للحركة .

مثال (٢) :

استخدم مبدأ الشغل والطاقة لايجاد العلاقة بين السرعة والازاحة فى حالة المقذوف الرأسى تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية الثابتة .

الحل

لتكن ف ، ع ، $ع_{.}$ ، جـ ، ق القياسات الجبرية لمتجهات الازاحة والسرعة النهائية والسرعة الابتدائية والعجلة والقوة على الترتيب .

بتطبيق العلاقة (٣) على الحركة بين الموضع الابتدائى والموضع النهائى :

$ط - ط_{.} =$ ش

$\therefore \frac{١}{٢}\, ك\, ع^{٢} - \frac{١}{٢}\, ك\, ع_{.}^{٢} = ق\, ف$

ولكن ق = ك جـ

$\therefore \frac{١}{٢}\, ك\, ع^{٢} - \frac{١}{٢}\, ك\, ع_{.}^{٢} = ك\, جـ\, ف$

وبضرب طرفى هذه المعادلة فى $\frac{٢}{ك}$

$\therefore ع^{٢} - ع_{.}^{٢} = ٢\, جـ\, ف$

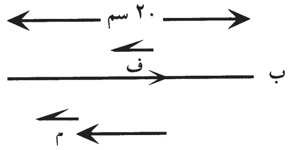
وهى العلاقة المعروفة بين السرعة والازاحة .

مثال (٣) :

اطلقت رصاصة كتلتها ٢٠٠ جم بسرعة ٤٠٠ متر / ث على حاجز سميك فاستقرت فيه على عمق ٢٠ سم ، أوجد مقدار قوة مقاومة مادة الحاجز لحركة الرصاصة باعتبار هذه القوة ثابتة .

الحل

ليكن أ موضع دخول الرصاصة إلى داخل الحاجز ، ب الموضع الذى استقرت فيه ، م مقدار قوة المقاومة مقدرا بوحدة الداين لدينا أ ب = ٢٠ سم ، بما أن قوة المقاومة تعمل فى عكس اتجاه الازاحة .



فأن الشغل الذى تبذله هذه القوة يكون سالبًا ويحسب كالآتى :

(شكل ٧٢)

ش = − أ ب × م = − ٢٠ م

طاقة حركة الرصاصة عند الدخول إلى الحاجز :

$\text{ط}_{\text{أ}} = \frac{١}{٢} \times ٢٠٠ \times (٤٠٠ \times ١٠٠)^{٢} = ١,٦ \times ١٠^{١١}$ إرج

(لاحظ تحويل السرعة إلى وحدة سم / ث) .

طاقة حركة الرصاصة عند الموضع ب :

$\text{ط}_{\text{ب}}$ = صفر لأن الرصاصة ساكنة فى هذا الموضع .

التغير فى طاقة حركة الرصاصة :

$\text{ط}_{\text{ب}} - \text{ط}_{\text{أ}} = -١,٦ \times ١٠^{١١}$ ارج

$\because \text{ط}_{\text{ب}} - \text{ط}_{\text{أ}} = \text{ش}$

$\therefore -١,٦ \times ١٠^{١١} = -٢٠\ \text{م}$

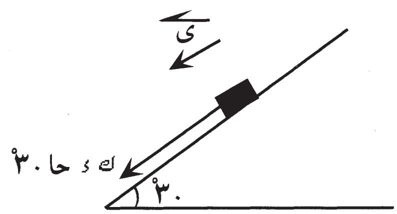
$\therefore \text{م} = \frac{١,٦ \times ١٠^{١١}}{٢٠} = ٨ \times ١٠^{٩}$ داين

مثال (٤) :

ترك جسم كتلته ٢٠ كجم ليهبط على خط أكبر ميل لمستو يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° . أوجد سرعة الجسم بعد أن يكون قد قطع مسافة ٥ أمتار على المستوى باستخدام مبدأ الشغل والطاقة .

الحل

نختار متجه وحدة $\overleftarrow{ى}$ فى اتجاه الحركة ، وليكن ع القياس الجبرى لمتجه السرعة بالنسبة للمتجه $\overleftarrow{ى}$ ، ل المسافة المقطوعة .



(شكل ٧٣)

القوة الوحيدة التى تبذل شغلا هى مركبة قوة الوزن الموازية لخط أكبر ميل الذى تحدث عليه الحركة ، وتكون هذه القوة موجهة لأسفل المستوى ومقدارها ك ء حا ٣٠° حيث ك كتلة الجسم ، ء مقدار عجلة الجاذبية الأرضية شكل (٧٣) .

الشغل الذى تبذله هذه القوة أثناء الازاحة المعطاة :

ش = (ك ء جا ٣٠°) × ل

= (٢٠ × ٩٫٨ × $\frac{١}{٢}$) × ٥

= ٤٩٠ نيوتن . متر (أو جول)

∴ التغير فى طاقة الحركة = الشغل المبذول

∴ $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} − صفر = ش

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ × ع^{٢} = ٤٩٠

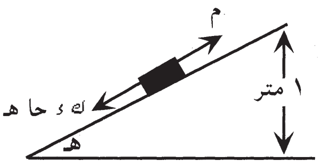
∴ ع^{٢} = ٤٩

∴ ع = ٧ متر / ث وهى السرعة التى يتحرك بها الجسم بعد أن يكون قد قطع ٥ أمتار من موقعة الابتدائى .

مثال (٥) :

وضع جسم كتلته ٣٠٠ جم عند قمة مستو مائل ارتفاعه ١ متر . أحسب السرعة التى يصل بها هذا الجسم إلى قاعدة المستوى علما بأن مقدار الشغل الذى بذلته قوة مقاومة المستوى للحركة يساوى ١٫٥٩ جول .

الحل



(شكل ٧٤)

ليكن ل طول المستوى مقاسًا بالمتر ، هـ قياس زاوية ميله على الأفقى ، تؤثر على الجسم قوتان توازيان اتجاه الحركة ؛ مركبة الوزن ، وتعمل فى خط أكبر ميل لأسفل ومقدارها ك ء حا هـ وقوة مقاومة المستوى لحركة الجسم عليه وتعمل فى خط أكبر ميل لأعلى وليكن مقدارها م .

الشغل المبذول أثناء حركة الجسم من قمة المستوى حتى قاعدته :

ش = (ك ء حا هـ − م) × ل

= (٠.٣ × ٩.٨ × $\frac{\text{١}}{\text{ل}}$ − م) × ل

= ٠.٣ × ٩.٨ − م ل

ولكن م ل = ١.٥٩ جول هو الشغل الذى بذلته قوة المقاومة .

∴ ش = ٠.٣ × ٩.٨ − ١.٥٩ = ١.٣٥ جول

∴ ط − ط. = ش

∴ $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٠.٣ ع^{٢} − صفر = ١.٣٥

∴ ع^{٢} = ٩ ∴ ع = ٣ متر / ث

تمارين (٤ - ٤)

(١) يتحرك جسيم كتلته ك فى خط مستقيم بحيث يعطى القياس الجبرى لمتجه سرعته بدلالة الزمن كالآتى : ع = أ + ب ن + جـ $ن^{٢}$

عين طاقة حركة هذا الجسيم وأثبت أن قدرة القوة المسببة للحركة عند اللحظة ن = صفر كانت تساوى ك أ ب

* استخدم مبدأ الشغل والطاقة لحل التمارين الآتية :

(٢) ترك جسم كتلته ١ كجم ليسقط من ارتفاع ١٠ أمتار عن سطح الأرض . عين طاقة حركته عندما يكون على وشك الاصطدام بالأرض .

(٣) قذف جسيم كتلته ٢٠٠ جم رأسيًا لأعلى من موضع على سطح الأرض بسرعة ١٥ متر / ث فما هى طاقة حركته عندما يكون على أرتفاع ٤ , ١٠ أمتار من نقطة القذف ؟

(٤) قذف جسم كتلته ٤٠٠ جم رأسيًا إلى أسفل من موضع يرتفع ٣ أمتار عن سطح الأرض بسرعة ٥ متر/ ث. عين طاقة حركته الابتدائية وكذلك طاقة حركته عندما يكون على وشك الاصطدام بالأرض .

(٥) اطلقت رصاصة كتلتها ٢٠٠ جم بسرعة ٢٩٤ متر / ث على قطعة من الخشب فاستقرت فيها على عمق ٢٠ سم ، أوجد قوة مقاومة الخشب لحركة الرصاصة مقدرة بوحدة ث كجم بفرض أنها ثابتة .

(٦) أطلقت رصاصة أفقيًا بسرعة ٧٠٠ متر /ث على قطعة من الخشب فاستقرت فيها على عمق ٨ سم . اذا اطلقت رصاصة مشابهة بنفس السرعة على هدف ثابت من نفس الخشب سمكه ٦ سم ، فما هى السرعة التى تخرج بها الرصاصة من الهدف بفرض أن المقاومة ثابتة .

(٧) أطلقت رصاصة بسرعة ٣٠٠ متر / ث على هدف من الخشب فاستقرت فيه على عمق ٢٧ سم ، فما هى السرعة التى يجب أن تطلق بها رصاصة مشابهة على هدف من نفس

الخشب سمكه ٣ سم حتى تستقر فيه وهى على وشك اختراقه بفرض أن المقاومة ثابتة ؟

(٨) يتحرك جسم كتلته ٥٠٠ جم بسرعة $\overleftarrow{ع} = ٣ \overleftarrow{س} + ٤ \overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان ومقدار السرعة تقاس بوحدة متر / ث ، وعين طاقة حركة هذا الجسيم بالإرج .

(٩) أطلقت رصاصة من بندقية بسرعة ٨٠٠ متر / ث على حاجز خشبى سميك فاستقرت داخله على عمق ٨ سم من السطح . فإذا أطلقت رصاصة أخرى من البندقية نفسها على حاجز مصنوع من نفس مادة الحاجز الأول وسمكه ٦ سم فاخترقته . أوجد سرعة الرصاصة لحظة خروجها من الحاجز ، علمًا بأن مقاومة الخشب لحركة الرصاصة واحدة فى الحالتين .

(١٠) يهبط جسم من السكون على خط أكبر ميل لمستو أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٣}{٤}$ ولمسافة ١٠٠ متر . أوجد سرعة الجسم عند نهاية مساره .

(١١) دفع جسم كتلته ٥ كجم بسرعة ٢٠ سم / ث لأسفل على خط أكبر ميل لمستو أملس طوله ٤٠٠ سم وارتفاعه ١٥٠ سم . أوجد طاقة حركة هذا الجسم عندما يصل إلى قاعدة المستوى.

(١٢) وضع جسم كتلته ٢٠٠ جم عند قمة مستو مائل ارتفاعه ١ متر فهبط حتى وصل إلى قاعدة المستوى بسرعة ٢ متر/ ث . فما هو الشغل الذى بذلته قوة المقاومة علمًا بأنها ثابتة؟

(١٣) يهبط جسم كتلته ٢٠٠ كجم من سكون على خط أكبر ميل لمستو مائل طوله ١٦ متراً وارتفاعه ٥ أمتار . فإذا كانت المقاومة لحركة الجسم تعادل $\frac{١}{٤}$ وزنه . أوجد طاقة حركة الجسم عندما يصل إلى قاعدة المستوى .

(١٤) أثرت قوة أفقية مقدارها ١٠ ث كجم لمدة ٥ ثوان على جسم كتلته ٢٠ كجم فحركته من السكون على مستوى أفقى أملس . أوجد سرعة الجسم فى نهاية الفترة .

وإذا اصطدم الجسم جسما ساكنا كتلته ٢٠ كجم وكونا معًا جسمًا واحداً . فما هى السرعة المشتركة لهما ؟ وأحسب ما فقد من طاقة حركة وبين ما حدث للطاقة المفقودة .

(١٥) أثرت قوة قدرها ٥ ث كجم فى كتلة مقدارها ١٩٦ كجم متحركة فى خط مستقيم فى اتجاه القوة فقطعت مسافة ٢٨٠ سم - أحسب مقدار الزيادة فى طاقة الحركة بالإرج - وإذا كانت طاقة حركة الكتلة فى نهاية المسافة ١٤١١٫٢ مليون إرج . احسب سرعة الكتلة عند بدء تأثير القوة .

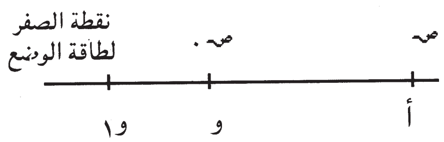
(١٦) تتحرك كرتان كتلتاهما ٣٠ جم ، ٩٠ جم فى خط مستقيم واحد على نضد أفقى أملس وفى اتجاهين متضادين بسرعتين مقدارهما ٥٠ سم / ث ، ٣٠ سم / ث على الترتيب ، فإذا كونت الكرتان جسمًا واحدا بعد التصادم . فاحسب سرعة هذا الجسم وطاقة الحركة المفقودة بالتصادم .

(١٧) سقطت كرة كتلتها ١٠٠ جم من ارتفاع ٣٫٦ مترا على أرض أفقية ، فاصطدمت بالأرض وارتدت رأسيًا إلى أعلى . فإذا بلغ النقص فى طاقة حركتها نتيجة للاصطدام بالأرض ١٫٩٦ جول . أوجد المسافة التى ارتدتها الكرة عقب تصادمها بالأرض .

(١٨) أسقطت مطرقة كتلتها طن واحد من ارتفاع ٤٫٩ مترا رأسيًا على عمود من أعمدة الأساس كتلته ٤٠٠ كجم فتدكه رأسيا فى الأرض لمسافة ١٠ سم . عين السرعة المشتركة للمطرقة والجسم بعد الاصطدام مباشرة ، عين أيضا طاقة الحركة المفقودة بالتصادم وكذا مقاومة الأرض.

طاقة الوضع : potential Energy

نعتبر حركة جسيم على خط مستقيم تحت تأثير قوة ثابتة $\overleftarrow{ق}$ توازى هذا الخط ، وليكن (أ) موضع الجسيم عند اللحظة الابتدائية ن = صفر ، (ب) موضعه عند اللحظة النهائية ن ، ص ، ص. طاقتى وضع الجسيم عند هذين الموضعين على الترتيب ، ش الشغل المبذول بواسطة القوة ق فى الانتقال من الموضع (أ) الى الموضع (ب) شكل (٧٥) .



تعريف :

تعرف طاقة وضع الجسيم عند لحظة زمنية ما ونرمز لها بالرمز ص ، على أنها تساوى الشغل المبذول بواسطة القوة المؤثرة على الجسم لو أنها حركته من الموضع الذى يحتله عند هذه اللحظة الزمنية حتى موضع آخر ثابت على الخط المستقيم الذى تحدث عليه الحركة .

لاستنتاج التعبير الرياضى لطاقة الوضع ، نختار موضعا ثابتا (و) على الخط المستقيم الذى تحدث عليه الحركة ولتكن ص طاقة الوضع عند الوضع (ب) .

من التعريف : ص = $\overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ب\,و}$

يتضح من تعريف طاقة الوضع أن :

١ - طاقة الوضع عند النقطة الثابتة (و) تساوى الصفر ، ولذلك تسمى النقطة (و) " نقطة الصفر لطاقة الوضع " .

٢ - إذا غيرنا نقطة الصفر لطاقة الوضع فإن طاقة الوضع تتغير أيضا ، لتكن ص. ، طاقة وضع الجسيم عند الموضع الابتدائى (أ)

∴ ص. = $\overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{أ\,و}$

∴ ص − ص. = $\overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ب\,و} - \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{أ\,و}$

$= \overleftarrow{ق} \odot (\overleftarrow{ب\,و} - \overleftarrow{أ\,و})$

$= \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ب\,أ}$

$= - \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{أ\,ب}$

ولكن ق⃗ ⊙ و أ⃗ = ش هو الشغل المبذول بواسطة القوة ق⃗ فى الانتقال من الموضع الابتدائى (أ) إلى الموضع النهائى (ب)

∴ صـ − صـ. = − ش

مما يعنى أن " التغير فى طاقة وضع الجسيم عند انتقاله من وضع ابتدائى إلى موضع نهائى يساوى سالب الشغل المبذول بواسطة القوة خلال الحركة " ومن وجهة أخرى نعرف أن مبدأ الشغل والطاقة ينص على أن :

ط − ط. = ش

بمقارنة العلاقتين الأخريين نجد أن

ط − ط. = − (صـ − صـ.)

أى أن :

ط + صـ = ط. + صـ.

وهى صيغة أخرى لمبدأ الشغل والطاقة

ولما كان الوضع (أ) هو وضع عام للجسيم فإن هذه العلاقة تنص على أن :

" مجموع طاقتى الحركة والوضع يظل ثابتًا أثناء الحركة "

وحدات قياس طاقة الوضع :

يتضح من تعريف طاقة الوضع أن وحدات قياسها هى نفسها وحدات قياس الشغل وطاقة الحركة.

ملاحظة هامة :

عند دراسة الحركة الرأسية لمقذوف تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية الثابتة ، يتفق على اختيار " نقطة الصفر لطاقة الوضع "عند سطح الأرض.

مثال (١) :

احسب طاقة وضع مقذوف كتلته ك يتحرك رأسيًا تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية الثابتة

الحل

ليكن أ موضع عام للمقذوف على ارتفاع ل من سطح الأرض ، $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة موجة رأسيًا لأعلى .

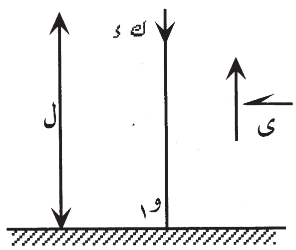
نختار نقطة الصفر لطاقة الوضع (و_1) عند تقاطع الخط الرأسى المار بالمقذوف مع المستوى الأفقى للأرض كما فى شكل (٧٦) .

القوة المؤثرة على المقذوف هى قوة الوزن $\overleftarrow{\text{ق}} = -\ \text{ك}\ \text{ء}\ \overleftarrow{\text{ى}}$

(حيث ء مقدار عجلة الجاذبية الأرضية) إذا كانت ص هى طاقة الوضع عند أ فإن :

$\text{ص} = \overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{أ و}_1}$

ولكن $\overleftarrow{\text{أ و}_1} = -\ \text{ل}\ \overleftarrow{\text{ى}}$



(شكل ٧٦)

$\therefore\ \text{ص} = (-\ \text{ك}\ \text{ء}\ \overleftarrow{\text{ى}}) \odot (-\ \text{ل}\ \overleftarrow{\text{ى}})$

$\therefore\ \text{ص} = \text{ك}\ \text{ء}\ \text{ل}$

أى أن :

" طاقة وضع المقذوف الرأسى عند موضع ما تساوى حاصل ضرب وزن المقذوف فى ارتفاع هذا الموضع عن سطح الأرض " .

مثال (٢) :

أطلق صاروخ رأسيا لأعلى من موضع على سطح الأرض بسرعة ١٤٠٠ متر/ ث فأصاب هدفًا على ارتفاع ٢٠٠٠ متر من سطح الأرض . ما هى السرعة التى كان يتحرك بها الصاروخ لحظة إصابة الهدف ؟

الحل

طاقة الوضع عند نقطة القذف (و) :

$\text{ص}_{.} =$ صفر

طاقة الوضع عند موضع الهدف (أ)

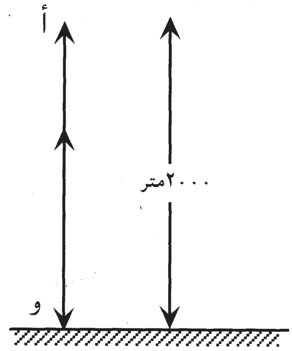
$\text{ص} = \text{ك}\ \text{ء}\ \text{ل}$

حيث ك كتلة الصاروخ مقدرة بالكيلو جرام ،

ء مقدار عجلة الجاذبية الأرضية مقاسا بوحدة متر/ ث^{٢}

، ل = ٢٠٠٠ متر

حسب مبدأ الشغل والطاقة :



(شكل ٧٧)

$$\frac{١}{٢}\,\text{ك}\,\text{ع}^{٢} + \text{ص} = \frac{١}{٢}\,\text{ك}\,\text{ع}_{.}^{٢} + \text{ص}_{.}$$

$$\therefore \frac{١}{٢}\,\text{ك}\,\text{ع}^{٢} + \text{ك}\ \text{ء}\ \text{ل} = \frac{١}{٢}\,\text{ك}\,\text{ع}_{.}^{٢} + \text{صفر}$$

$$\therefore \text{ع}^{٢} + ٢\ \text{ء}\ \text{ل} = \text{ع}_{.}^{٢}$$

$$\therefore \text{ع}^{٢} = \text{ع}_{.}^{٢} - ٢\ \text{ء}\ \text{ل}$$

$$= (١٤٠٠)^{٢} - ٢ \times ٩٫٨ \times ٢٠٠٠ = ١٩٢٠٨ \times ١٠^{٢}$$

$$\therefore \|\overleftarrow{\text{ع}}\| \simeq ١٣٨٦ \text{ متر / ث}$$

مثال (٣) :

احسب طاقة وضع جسيم يتحرك على خط أكبر ميل لمستو أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ تحت تأثير عجلة الجاذبية الأرضية الثابتة .

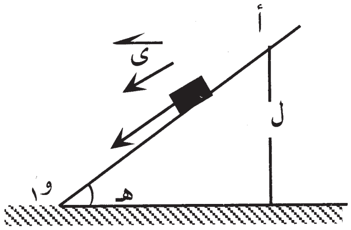
الحل

ليكن أ موضع عام للجسيم على المستوى ، ل ارتفاع هذا الموضع عن سطح الأرض ، $\overleftarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة موازٍ لخط أكبر ميل وموجه لأسفل .

نختار نقطة الصفر لطاقة الوضع ($\text{و}_{١}$) عند نقطة تقاطع خط أكبر ميل للمستوى مع الأرض الأفقية كما فى شكل (٧٨) .

القوة الوحيدة الموازية لاتجاه الحركة هى مركبة قوة الوزن وتعمل فى خط أكبر ميل لأسفل ومقدارها ك ء حا هـ حيث ء مقدار عجلة الجاذبية الأرضية ، ك كتلة الجسيم .

$\overleftarrow{\text{ق}} = (\text{ك ء حا هـ})\ \overleftarrow{\text{ى}}$



(شكل ٧٨)

إذا كانت صـ هى طاقة الوضع عند ا فأن :

$\text{صـ} = \overleftarrow{\text{ق}} \odot \overleftarrow{\text{أ و}_1}$

$\text{ولكن } \overleftarrow{\text{أ و}_1} = \text{ا و}_1\ \overleftarrow{\text{ى}} = \dfrac{\text{ل}}{\text{جا هـ}}\ \overleftarrow{\text{ى}}$

$\therefore \text{صـ} = (\text{ك ء جا هـ})\ \overleftarrow{\text{ى}} \odot \left(\dfrac{\text{ل}}{\text{جا هـ}}\right) \overleftarrow{\text{ى}}$

$= \text{ك ء ل}\ \overleftarrow{\text{ى}} \odot \overleftarrow{\text{ى}}$

$\boxed{\text{صـ} = \text{ك ء ل}}$

أى أن :

" طاقة وضع الجسيم المتحرك على خط أكبر ميل لمستو أملس عند موضع ما تساوى حاصل ضرب وزن الجسيم فى ارتفاع هذا الموضع عن سطح الأرض "

مثال (٤) :

صعد جسم وزنه ٤ ثقل كيلو جرام مسافة ٧٥ سنتيمتر على خط أكبر ميل لمستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ، احسب الزيادة فى طاقة وضعه مقدرة بالجول .

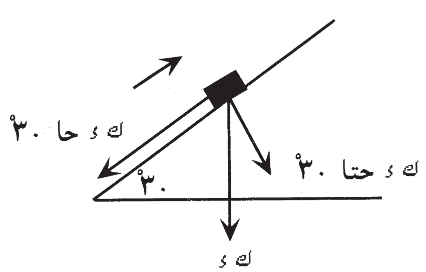
الحل

الزيادة فى طاقة الوضع = صـ − صـ.

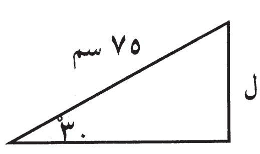
= ك ء ل − ٠

= ٤ × ٩٫٨ × ٠٫٧٥ جا ٣٠°

= ١٤٫٧ جول



(شكل ٧٩)



تمارين (٤ - ٥)

(١) أحسب طاقة وضع جسم كتلته ٤٥٠ جم موجود على أرتفاع ٣٠ مترا من سطح الأرض مقدرا إجابتك بالجول .

(٢) أحسب طاقة وضع جسم كتلته ٣ كجم وموجود على ارتفاع ٢٠ سم من سطح الأرض مقدرا إجابتك الإرج .

(٣) هبطت طائرة عمودية وزنها ٣٥٠٠ ث كجم رأسيًا من أرتفاع ١٥٠ متراً إلى ارتفاع ٥٠ متراً من سطح الأرض . ما هو مقدار الفقد فى طاقة وضعها ؟

(٤) رفع ونش جسمًا وزنه ١٥٠ ث كجم رأسيًا من موضعه على الأرض إلى موضع جديد على ارتفاع ٦ أمتار من سطح الأرض . ما هى الزيادة فى طاقة وضع الجسم ؟

(٥) هبط جسم كتلته ٢٥٠ جم مسافة ٨٠ سم على خط أكبر ميل لمستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها °٦٠ . ما هو التغير فى طاقة وضعه ؟

(٦) صعد جسم وزنه ٢ ث كجم مسافة ١٢٠ سم على خط أكبر ميل لمستوى أملس يميل علي الأفقى بزاوية قياسها °٣٠ . أحسب الزيادة فى طاقة حركته .

(٧) جسم كتلته ٥ كجم موضوع على أرتفاع ١٥ مترا عن سطح الأرض . أوجد طاقة وضعه، وإذا سقط الجسم رأسيًا فأوجد طاقة وضعه وطاقة حركته عندما يكون على أرتفاع ٥ أمتار عن سطح الأرض .

(٨) بندول بسيط يتكون من خيط طوله ٩٠ سم ويحمل فى طرفه كتلة مقدارها ٧٥ جم ويتذبذب فى زاوية قياسها °١٢٠ أوجد :

أولا : زيادة طاقة الوضع فى نهاية المسار عنها فى منتصفه .

ثانيا : سرعة الكتلة عند منتصف المسار .

(٩) أثرت القوة $\overrightarrow{ق}$ = ٦ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ على جسم فحركته من الموضع أ إلى الموضع ب فى زمن ٢ ثانية ، وكان متجه الموضع للجسم يعطى بالعلاقة :

$\overrightarrow{ر}$ = (٣ $ن^{٢}$ + ٢) $\overrightarrow{س}$ + (٢ $ن^{٢}$ + ١) $\overrightarrow{ص}$. احسب التغير فى طاقة الوضع للجسم حيث معيار $\overrightarrow{ق}$ مقيسًا بالنيوتن ، معيار $\overrightarrow{ر}$ بالمتر ، ن بالثانية .

(١٠) حلقة كتلتها $\frac{١}{٢}$ كجم تنزلق على عمود أسطوانى رأسى خشن فإذا كانت سرعتها ٦٫٣ متر/ ث بعد أن قطعت مسافة ٤٫٨ متر من بدء حركتها . احسب باستخدام مبدأ الشغل والطاقة الشغل المبذول من المقاومة أثناء الحركة .

نماذج اختبارات الميكانيكا

النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) أ) قوتان متوازيتان مقدارهما ٧٠ نيوتن ، ٣٠ نيوتن والمسافة بين خطى عملهما ٥٠سم أوجد محصلتهما فى الحالتين : أولاً : القوتان فى اتجاه واحد . ثانياً : القوتان فى اتجاهين متضادين .

[١٠٠نيوتن ، ١٥سم عن الأولى ، ٤٠ نيوتن ، ٣٧,٥سم عن الأولى]

ب) عرف معامل الاحتكاك

وضع جسم وزنه (و) على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° و معامل الاحتكاك بينه و بين المستوى يساوى $\frac{١}{٣}$ أوجد قيمة أقل قوة أفقية موجهة نحو المستوى و يقع خط عملها فى مستوى رأسى يمر بخط أكبر ميل للمستوى تؤثر على الجسم و تجعله على وشك الحركة .

(أولاً) لأسفل المستوى (ثانياً) لأعلى المستوى

[$\frac{٥\sqrt{٣} - ٦}{١٣}$ و ، $\frac{٦ + ٥\sqrt{٣}}{١٣}$ و]

---

(٢) أ) تؤثر القوة $\overrightarrow{ق} = ل \overrightarrow{س} - ٥ \overrightarrow{ص}$ عند النقطة أ(٦ ، ٣) وكان عزمها بالنسبة للنقطة ب(٨ ،−١) يساوى $-٢\overrightarrow{ع}$ أوجد قيمة الثابت ل . [٣]

ب) اذكر الشروط الكافية و اللازمة لاتزان مجموعة من القوى

يتزن قضيب منتظم أ ب طوله ل فى مستوى رأسى مرتكز بطرفه أ على حائط رأسى أملس و بطرفه ب على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك بينها و بين القضيب يساوى $\frac{١}{٣}$ فإذا كان قياس زاوية ميل القضيب على الرأسى يعطى من العلاقة ظا هـ = $\frac{١}{٢}$ فما هى أبعد نقطة على القضيب من الطرف ب يعلق منها ثقل قدره ضعف وزن القضيب حتى يكون القضيب على وشك الانزلاق [النقطة على بعد $\frac{٣}{٤}$ ل من ب]

---

(٣) أ) عرف الازدواج :

أ ب قضيب طوله ٥٠سم ووزنه ١٠ ث كجم تؤثر فى منتصفه و يمكن للقضيب أن يدور فى مستو رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه أ أثر على القضيب ازدواج فى مستو رأسى عزمه ١٢٥ ث كجم . سم . برهن على أن رد فعل المفصل عند أ يساوى وزن القضيب وأوجد ميل القضيب على الأفقى فى وضع التوازن .

[٦٠° إلى أعلى أو إلى أسفل]

ب) أ ب لوح من الخشب طوله ٢٠ متراً وزنه ٥٠ ث كجم يؤثر عند منتصفه . وضع أفقياً على حاملين يبعد أحدهما ٢ متر عن أ ويبعد الآخر ٥ متر عن الطرف الآخر ب فإذا صعد رجل وزنه ٧٠ ث كجم على اللوح مبتدأ من أ متجهاً نحو ب . أوجد :

أولاً : رد فعل كل من الحاملين على اللوح عندما يكون الرجل عند أ .

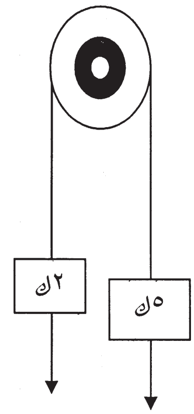
ثانياً : أقصى مسافة يمكن أن يتحركها الرجل دون أن ينقلب اللوح .

[$ر_١$ = ١٠٠ ث كجم ، $ر_٢$ = ٢٠ ث كجم ، ف = $١٨\frac{٤}{٧}$ متراً من أ]

(٤) أ) فى الشكل المرسوم :

ربطت كتلتان ٥ك ، ٢ك كيلوجرام فى نهايتى خيط خفيف يمر على بكرة ملساء ، وحفظت المجموعة فى حالة اتزان وجزءا الخيط رأسيان فإذا تركت المجموعة تتحرك من سكون . فأوجد عجلة حركة المجموعة ، وإذا كان الضغط على محور البكرة يساوى ١١٢ نيوتن فأوجد قيمة ك

[جـ = ٤,٢ م / ث^{٢} ، ك = ٢ كجم]



ب) شخص كتلته ٧٣,٥ كجم موجود داخل مصعد عين رد فعل المصعد على هذا الشخص بثقل الكيلوجرام فى الحالات الآتية :

أولاً : إذا كان المصعد ساكناً .

ثانياً : إذا تحرك المصعد بعجلة منتظمة مقدارها ١٤٠سم / ث^{٢} رأسياً إلى أعلى .

ثالثاً : إذا تحرك المصعد بعجلة منتظمة مقدارها ١٤٠ سم / ث^{٢} رأسياً إلى أسفل .

[٧٣,٥ ، ٨٤ ، ٦٣ ث كجم]

---

(٥) أ) عرف القدرة :

تتحرك سيارة كتلتها ٢ طن وقدرة آلتها ٢٠ حصاناً على طريق أفقى تتناسب فيه قوة مقاومة الطريق للحركة طرديا مع مقدار السرعة . فإذا كانت أقصى سرعة للسيارة على هذا الطريق هى ٩٠ كم / س فما هو مقدار قوة المقاومة عن كل طن للسيارة عندما تتحرك بسرعة ١٨ كم / س . احسب كمية حركة السيارة عند هذه السرعة . **[٦ث كجم ، ١٠٠٠٠ نيوتن . ث]**

ب) قذف جسم كتلته ٢٠٠ جم إلى أعلى مستو أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٨}{٤٩}$ وفى اتجاه خط أكبر ميل بسرعة ٣٠سم / ث . احسب التغير الذى يطرأ على طاقة وضع هذا الجسم عندما تصبح سرعته ١٨سم / ث . **[٥٧٦٠٠ إرج]**

---

(٦) أ) يتحرك جسم كتلته ٢كجم ومتجه إزاحته $\overline{\text{ف}}$ = ٤ن^{٢} $\overline{\text{س}}$ + ٣ن $\overline{\text{ص}}$ بتأثير قوة $\overline{\text{ق}}$. أوجد الشغل المبذول من هذه القوة بعد ثانيتين من بدء الحركة علماً بأن ف مقاسة بالمتر ، ق بالنيوتن ، ن بالثانية .

[٢٥٦ جول]

ب) كرة كتلتها ٢٥٠ جرام تتحرك فى خط مستقيم بسرعة مقدارها ٣٢سم/ث فإذا اصطدمت بكرة اخرى ساكنة كتلتها ٥٥٠جرام وتحركتا معاً كجسم واحد . أوجد :

(أولاً) السرعة المشتركة لهما بعد التصادم . **[١٠سم/ث]**

(ثانياً) طاقة الحركة المفقودة بسبب التصادم . **[٨٨٠٠٠ إرج]**

(ثالثاً) قوة المقاومة اللازمة لإيقاف الجسم بعد أن يقطع مسافة ٢٠سم من لحظة التصادم. **[٢٠٠٠داين]**

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) أ) إذا كان و $\overleftarrow{س}$ ، و $\overleftarrow{ص}$ إتجاهين متعامدين ، $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ متجهى الوحدة فى هذين الاتجاهين على الترتيب أثرت القوة $\overline{ق}$ = ٣ $\overline{س}$ − ٤ $\overline{ص}$ عند النقطة أ = (١ ، ٢) .

أوجد متجه عزم هذه القوة بالنسبة للنقطة (و) ثم عين طول العمود الساقط من النقطة (و) على خط عمل القوة . [− ١٠ $\overline{ع}$ ، ٢ وحدة طول]

ب) عرف زاوية الاحتكاك :

وضع جسم مقدار وزنه ٦٠ نيوتن على مستوى أفقى خشن و أثرت على الجسم فى نفس المستوى قوتان مقدارهما ٢٠ ، ٤٠ نيوتن تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° فظل الجسم ساكناً .

اثبت أن قياس زاوية الاحتكاك (ل) بين الجسم و المستوى يجب ألا يقل عن ٣٠° .

و إذا كان ل = ٤٥° ، و بقى اتجاه القوتين ثابتاً ، كما بقيت القوة ٤٠ نيوتن دون تغيير ، فعين أصغر مقدار للقوة الأخرى لكى يتحرك الجسم ، [(٢٠ + ٢٠ $\sqrt{٦}$)نيوتن]

---

(٢) أ) أ ب قضيب منتظم طوله ١٥٠سم ووزنه ١٠٠ نيوتن يرتكز القضيب فى وضع أفقى على حاملين أحدهما عند نقطة أ والثانى عند نقطة جـ التى تبعد ٢٥سم من ب . أوجد الضغط الواقع على كل من الحاملين ، ثم عين مقدار الثقل الذى يجب تعليقه عند ب حتى يكون القضيب على وشك الدوران ، ماهى قيمة الضغط على كل من الحاملين عندئذ ؟ [٤٠ ، ٦٠ ، ٢٠٠ ، صفر ، ٣٠٠ نيوتن]

ب) أ ب جـ ء مستطيل فيه أب = ٣٠سم ، بجـ = ٤٠سم ، أثرت مجموعة من القوى مقاديرها ١٢ ، ٢٤ ، ١٢ ، ٢٤ ث كجم فى الاتجاهات $\overleftarrow{بأ}$ ، $\overleftarrow{بجـ}$ ، $\overleftarrow{ءجـ}$ ، $\overleftarrow{ءأ}$ على الترتيب . اثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه ثم أوجد مقدار كل من القوتين اللتين تؤثران فى أ ، جـ وتوازيان $\overleftrightarrow{بء}$ وتجعلان المجموعة متزنة [٢٤٠ ث كجم ، ٥ ، ٥ ث كجم]

---

(٣) أ) قوتان متوازيتان وفى اتجاه واحد مقدارهما ٤ ، ٧ نيوتن تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب من جسم متماسك فإذا انتقلت نقطة تأثير القوة التى مقدارها ٧نيوتن مسافة قدرها ل على $\overleftarrow{بأ}$ بحيث تظل هذه القوة موازية للقوة الأخرى . اثبت أن نقطة تأثير محصلة القوتين تنتقل مسافة قدرها $\frac{٧}{١١}$ ل .

ب) يستند سلم منتظم بأحد طرفيه على حائط رأسى معامل الاحتكاك بينه و بين السلم يساوى $\frac{١}{٣}$ و بطرفه الآخر على أرض أفقية من نفس خشونة الحائط . فإذا اتزن السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الحائط بزاوية ظلها $\frac{٦}{١١}$ ، برهن على أن رجل وزنه يساوى ثلاثة أمثال وزن السلم لا يمكنه الصعود أكثر من $\frac{٧}{١٠}$ طول السلم دون أن ينـــزلق الأخير .

(٤) أ) أثرت القوة $\overrightarrow{ق} = ٢ \overrightarrow{س} + ٣ \overrightarrow{ص}$ على جسيم وكان متجه موضع الجسيم عند لحظة معينة ن يتعين من العلاقة : $\overrightarrow{ر} = (٣ن^{٢} + ٧) \overrightarrow{س} + (ن + ٢) \overrightarrow{ص}$ حيث ق مقاسة بالنيوتن ، المسافة بالمتر ، الزمن ن بالثانية ، احسب الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{ق}$ من ن = ١ث إلى ن = ٣ث [٥٤جول]

ب) سيارة كتلتها طن واحد تسير بسرعة مقدارها ٥٤ كم فى الساعة على طريق افقى . فما قدرة المحـرك إذا كانت قوة المقاومة مقدارها ٣٠ ث كجم ، و إذا لم تتغير قدرة الألة و المقاومة ، فما هى السرعة الثابتـة التى تصعد بها السيارة منحدراً يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث جا هـ = $\frac{١}{٢٠}$

[٦حصان ، ٢٠,٢٥كم/س]

---

(٥) أ) مطرقة كتلتها ٥٤٠كجم تسقط من ارتفاع ٢,٥ متراً على عمود أساس كتلته ٦٠كجم . فتدكه فى الأرض فى كل مرة مسافة ٩سم ، فإذا كانت المطرقة والعمود تتحركان كجسم واحد عقب الصدمة مباشرة فأوجد مقدار مقاومة الأرض لهذا الجسم بفرض أنها ثابتة . [١٤١٠٠ث كجم]

ب) وضع جسم كتلته ١٢٠ جم على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٤}{٣}$ ثم ربط الجسم بخـيط يمر على بكرة ملساء عند قمة المستوى و يتدلى من طرفه كفة ميزان كتلتها بما فيها من أثقال ١٦٠ جـم فإذا كان معامل احتكاك المستوى يساوى $\frac{٢}{٣}$ فأوجد المسافة التى تقطعها المجموعة من السكون فى ٣ ثوان

[٢٥٢سم]

---

(٦) أ) سقط جسم كتلته $\frac{١}{٢}$ كجم رأسياً فى بئر فوصل إلى سطح الماء بعد ثانية واحدة ثم أخذ يغوص فى الماء حتى وصل إلى قاع البئر بعد ثانية أخرى ، فإذا كان ارتفاع الماء فى البئر ٥,٣٩متر فأوجد :

(أولاً) التغير فى كمية حركة الجسم من لحظة وصوله إلى سطح الماء إلى اللحظة التى تسبق ملامـسته لقـاع البئر مباشرة . [٢,٢٠٥كجم . متر/ث]

(ثانياً) مقدار مقاومة الماء للجسم أثناء غوصه مقدرة بثقل الجرام علماً بأنها ثابتة. [٦٦٥٠ث جرام]

ب) جسم كتلته ٢٠كجم موضوع على مستو أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٣}{٥}$ ، أثرت على الجسم قوة مقدارها ١٦ث كجم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى . أوجد مقدار عجلة الحركة ، وإذا انعدم تأثير القوة بعد ٣ثوان من بدء الحركة . فأوجد المسافة التى يقطعها الجسم بعد ذلك حتى يسكن لحظياً .

[١,٩٦ م/ث^{٢} ، ٢,٩٤ متر]

النموذج الثالث

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) أ) أربع قوى متوازية و متحدة الاتجاه مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ث كجم تؤثر عند النقط أ ، ب ، جـ ، ٤ على الترتيب الواقعة على خط مستقيم واحد عمودى على اتجاه القوى . عين محصلة هذه القوى علما بأن أب = ٣٠سم ، بجـ = ٤٠سم ، جـ٤ = ٥٠سم . [١٠ ث كجم ، ٧٥سم من أ]

ب) أ ب جـ ٤ هـ و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٨سم ، أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ١ ، ٨ ، ٦ ، ٥ث جرام فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{٤جـ}$ ، $\overleftarrow{٤هـ}$ ، $\overleftarrow{بهـ}$ ، $\overleftarrow{وأ}$ على الترتيب .

(أ) اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً ثم أوجد معيار عزمه . [$٨٠\sqrt{٣}$ ث جم . سم]

(ب) أوجد مقدار واتجاه قوتين عموديتين على $\overline{أ٤}$ لتصبح المجموعة متزنة .

[$٥\sqrt{٣}$ ، $٥\sqrt{٣}$ ث جم وتعملان فى اتجاهى $\overleftarrow{بو}$ ، $\overleftarrow{جهـ}$]

---

(٢) أ) أب قضيب منتظم وزنه ٥٠ نيوتن وطوله ١٦٠سم معلق فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند جـ ، ٤ حيث أجـ = ب٤ = ٤٠سم . فإذا علق من الطرف ب ثقل قدره ١٠نيوتن فأوجد مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف أ ليظل القضيب متزنا فى وضع أفقى ويكون الشد فى الخيط عند جـ ضعف الشد فى الخيط ٤.

[٢٤ نيوتن ، ش = ٢٨ نيوتن]

ب) مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٤}{٣}$ ، وضع عليه جسم وزنه ١٠نيوتن ، أوجد النهايتين الصغرى والعظمى لمقدار القوة التى تؤثر على الجسم فى خط أكبر ميل للمستوى لأعلى وتجعله على وشك الحركة علماً بأن معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{١}{٢}$. [٥ ، ١١ نيوتن]

---

(٣) أ) أ ب جـ ٤ مستطيل فيه أب = ٨سم ، بجـ = ٦سم . أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ١٠ ، ق ، ك نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{جب}$ ، $\overleftarrow{جـ٤}$ ، $\overleftarrow{أ٤}$ على الترتيب فإذا انعدم المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول كل من النقطتين جـ ، م حيث م مركز المستطيل ، فأوجد قيمة كل من ق ، ك . [$\frac{٤٠}{٣}$ ، ٩ نيوتن]

ب) أب سلم منتظم طوله ٥٢٠سم ووزنه ٢٤ث كجم يرتكز بطرفه أ على مستو أفقى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس . حفظ السلم من الانزلاق بواسطة حبل ربط أحد طرفيه بقاعدة الحائط رأسياً أسفل ب وربط طرفه الآخر فى إحدى درجات السلم على بعد من أ يساوى ١٣٠سم . فإذا كان الطرف ب على بعد ٤٨٠سم من المستوى الأفقى فأوجد مقدار قوة رد فعل كل من الأرض عند أ والحائط عند ب وكذا مقدار الشد فى الخيط . [٣٠ ، $٧\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣\sqrt{٤١}}{٢}$ نيوتن]

(٤) أ) مصعد كهربى وزنه ٣٥٠ث كجم يهبط رأسياً إلى أسفل بعجلة تقصيرية منتظمة مقدارها ٤٩سم/ث^{٢} وبه رجل وزنه ٧٠ث كجم . أوجد مقدار كل من ضغط الرجل على أرض المصعد والشد فى الحبل الذى يحمل المصعد بثقل الكجم . [٧٣,٥ ، ٤٤١ث كجم]

ب) ترك جسم لينـــزلق على مستوى مائل ينتهى بمستوى أفقى خشونتيهما واحدة ، فإذا كان معامل الاحتكاك يساوى $\frac{١}{٤}$ وكان طول المستوى المائل ٩أمتار ، ويميل المستوى المائل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث ظاهـ= $\frac{٣}{٤}$ فأوجد أقصى مسافة يتحركها الجسم على المستوى الأفقى قبل أن يسكن ، علماً بأن سرعة الجسم لاتتغير بانتقاله من المستوى المائل إلى المستوى الأفقى . [١٤,٤ متر]

---

(٥) أ) وضع جسم كتلته ٤٠٠ جرام على نضد أفقى أملس ثم ربط بخيط خفيف يمر على كل بكرة ملساء مثبتة فى حافة النضد و يحمل طرفه الآخر جسما كتلته ك جرام فإذا كان مقدار الشد فى الخيط ٨٠ ثقل جرام فأوجد :

(أولاً) الضغط على محورالبكرة (ثانياً) عجلة المجموعة (ثالثاً) قيمة ك

[٨٠ $\sqrt{٢}$ ث جم ، ١٩٦سم/ث^{٢} ، ١٠٠جم]

ب) تتحرك شاحنة كتلتها ٢طن وقدرة محركها ٢٠حصانا على طريق أفقى بأقصى سرعة وقدرها ٨٠كم/س . عين مقدار مقاومة الطريق لحركة الشاحنة وإذا حُملت هذه الشاحنة بشحنة وزنها ٤٧٥ث كجم وتحركت صاعدة طريقاً منحدراً يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٥}$ فما هى أقصى سرعة لها على هذا الطريق إذا علم أن مقدار مقاومة الطريق المنحدر ضعف قيمة مقدار مقاومة الطريق الأفقى .

[٦٧,٥ث كجم ، ١٨كم/ساعة]

---

(٦) أ) تحرك رجل وزنه ٧٢ث كجم صاعداً طريقاً يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٤}$ فقطع ١٠٠متراً . احسب التغير فى طاقة وضع الرجل . [١٨٠٠ث كجم . متر]

ب) أثرت قوة قدرها ٤٨ث جرام على جسم ساكن موضوع على مستوى أفقى لفترة زمنية ما ، فاكتسب الجسم فى نهايتها طاقة حركة قدرها ١٨٩٠٠ث جم . سم وبلغت كمية حركته عندئذ ١٧٦٤٠٠جم.سم/ث ثم رفعت القوة فعاد الجسم إلى السكون مرة أخرى بعد أن قطع مسافة $\frac{١}{٢}$ ١٠ متراً من لحظة رفع القوة . أوجد كتلة الجسم ومقاومة المستوى لحركته بفرض ثبوتها . كذلك أوجد زمن تأثير القوة .

[٨٤٠جم ، ١٨ث جم ، ٦ ثانية]

النموذج الرابع

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) أ) اثبت أن مجموع عزوم عدة قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة بالنسبة لأى نقطة فى الفراغ يساوى عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة .

تؤثر القوى $\overline{\text{ق}}_{١} = \overline{\text{س}} + \overline{\text{ص}}$ ، $\overline{\text{ق}}_{٢} = \overline{\text{س}} - \overline{\text{ص}}$ ، $\overline{\text{ق}}_{٣} = ٢\,\overline{\text{س}} - ٣\,\overline{\text{ص}}$ فى النقطة أ(١ ، ١)

أوجد مجموع عزوم هذه القوى بالنسبة لنقطة الأصل ، ومن ثم أوجد طول العمود الساقط من نقطة الأصل على خط عمل محصلة هذه القوى . [$-٧\,\overline{\text{ع}}$ ، ١,٤وحدة طول]

ب) جسم وزنه ٣٢ث كجم يكون على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه إذا وضع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{١}{٤}$ ، فإذا وضع هذا الجسم على مستوى أفقى فى نفس خشونة المستوى المائل وأثرت فيه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقى زاوية جيبها $\frac{٤}{٥}$ فجعلته على وشك الحركة . فأوجد مقدار هذه القوة ومقدار قوة رد الفعل العمودى . [١٠ ، ٢٤ث كجم]

---

(٢) أ) أ ب جـ د قضيب غير منتظم طوله ٣٥سم يرتكز فى وضع أفقى على حاملين أملسين عند ب ، جـ حيث أب = ٦سم ، جـد = ٧سم وقد وجد أنه لو علق من الطرف أ ثقل قدره ١٢٠ث جم أو من الطرف د ثقل قدره ١٨٠ث جم كان كل من الثقلين يكفى لأن يكون القضيب على وشك الدوران ،أوجد وزن القضيب وبعد نقطة تأثير وزنه عن الطرف أ . [و = ٩٠ث جم ، ١٤سم]

ب) أب قضيب منتظم وزنه ٦ثقل كجم وطوله ١٢٠سم يتصل طرفه أ بمفصل فى حائط رأسى ، علق ثقل قدره ٨ثقل كجم من نقطة على القضيب على بعد ٣٠سم من الطرف أ وحفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة حبل خفيف مربوط بطرف ب وبنقطة على الحائط تقع رأسياً فوق أ تماماً . فإذا كان الحبل يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فأوجد :

أولا : مقدار الشد فى الحبل[١٠ث كجم] ثانياً : مقدار رد الفعل الكلى للمفصل[$٢\sqrt{٣٩}$ ثقل كجم]

---

(٣) أ) قضيب منتظم طوله ١٠٠سم ، وزنه ٨ث كجم علق فى وضع أفقى من نقطتين تبعد كل منهما ١٠سم عن أحد طرفيه بخيطين رأسيين لا يتحمل كل منهما شداً أكثر من ١٦ث كجم . فإذا علق ثقل قدره "و" على بعد ٢٠سم من منتصف القضيب ، أوجد مقدار "و" التى تجعل أحد الخيطين على وشك أن ينقطع ثم أوجد مقدار الشد فى الخيط الآخر . [١٦ ، ٨ ث كجم]

ب) أ ب جـ د شبه منحرف فيه أب=١٢سم ، جـد=٦سم ، د أ = ٨سم ، ق(∠ أ)=ق(∠ د)= ٩٠° أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ١٨ ، ١٥ ، ٩ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{د أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{بجـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـد}}$ على الترتيب .

اثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً ثم عين معيار عزمه . [٣٦٠ ث كجم . سم]

(٤) أ) أطلقت رصاصة كتلتها ١٢جم بسرعة ٢١متر/ث ، أوجد طاقة حركة الرصاصة بالجول و إذا اصطدمت الرصاصة عندئذ عموديا بحائط رأسى ودخلت فيه مسافة ٦سم . فأوجد مقاومة الحائط للرصاصة مقدرة بثقل الكيلوجرام بفرض أنها ثابتة . [٢,٦٤٦ جول ، ٤,٥ ث كجم]

ب) مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° يتصل عند قمته بمستوى أفقى خشن وضع جسم كتلته ٦٠جم على المستوى الأفقى وربط بأحد طرفى خيط رفيع مار على بكرة ملساء عند حافة اتصال المستويين . وربط فى الطرف الآخر للخيط جسم كتلته ١٠٠جم موضوع على المستوى المائل . فإذا كان كل من فرعى الخيط عموديا على خط تقاطع المستويين . فأوجد العجلة التى تتحرك بها المجموعة و الشد فى الخيط علماً بأن معامل الاحتكاك بين الجسم الأول والمستوى الأفقى $\frac{١}{٤}$ ، وبين الجسم الثانى والمستوى المائل $\frac{١}{٢\sqrt{٣}}$. وإذا قطع الخيط بعد ٤ثوان من بدء الحركة فأوجد المسافة الكلية التى تحركتها الكتلة ٦٠جم حتى تسكن . [$\frac{٢٤٥}{٤}$ سم /ث^{٢} ، $\frac{٧٥}{٤}$ ث جم ، $٦١٢\frac{١}{٢}$ سم]

---

(٥) أ) اصطدمت كرتان تتحركان على خط مستقيم أفقى فى اتجاهين متضادين كتلة الأولى ٥كجم وسرعتها عند لحظة الاصطدام ٣٠سم/ث وسرعة الثانية عند هذه اللحظة ٥٠سم/ث ، أوجد كتلة الكرة الثانية إذا علم أنه بعد التصادم مباشرة ارتدت الكرة الأولى على نفس الخط المستقيم بسرعة ١٠سم/ث وسكنت الثانية . أوجد كذلك طاقة الحركة المفقودة نتيجة لهذا التصادم . [٤كجم ، $\frac{٧}{١٠}$ جول]

ب) إذا كانت أ(٢ ، ٢) ، ب (٥ ، ٦) وتحرك جسيم كتلته ١٠وحدات من أ فى الاتجاه $\overleftarrow{أب}$ حتى وصل إلى ب تحت تأثير قوة $\overleftarrow{ق}$ = ٢$\overleftarrow{س}$ + ٦$\overleftarrow{ص}$ أوجد الشغل المبذول أثناء الحركة . وإذا بدأ الجسيم حركته من السكون فأوجد طاقة حركته عند ب . [٣٠]

---

(٦) أ) كرة معدنية كتلتها ٩جرام تتحرك فى خط مستقيم داخل وسط محمل بالغبار الذى يلتصق بسطحها بمعدل جرام واحد كل ثانية فإذا كانت إزاحة هذه الكرة فى نهاية فترة زمنية ﻥ هو $\overleftarrow{ف}$=($\frac{١}{٣}$ ﻥ^{٣}+٣ﻥ+٢)$\overleftarrow{س}$ حيث $\overleftarrow{س}$ متجه وحدة فى اتجاه حركتها . أوجد متجه القوة المؤثرة على الكرة عند أى لحظة ﻥ . واحسب معيارها عندما ﻥ = ٢ثانية إذا علم أن معيار الإزاحة يقاس بالسم . [٥١ داين]

ب) قطار كتلته ٣٠٠طن يصعد منحدراً يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢٤٠}$ فى اتجاه خط أكبر ميل بأقصى سرعة له ومقدارها ٥٤كم/س فإذا كانت قدرة محركه ٤٥٠حصان . أوجد مقدار مقاومة المنحدر وإذا تحرك هذا القطار بعد ذلك على طريق أفقى بأقصى سرعة له فاحسب مقدار مقاومة الطريق الأفقى إذا علم أن مقدار المقاومات على الطريقين المائل والأفقى تتناسب مع مقدار السرعة عليهما . وأوجد كذلك مقدار أقصى سرعة على الطريق الأفقى . [١٠٠٠ ث كجم ، ١٥٠٠ث كجم ، ٨١ كم/ساعة]

الإجابات

الخاصة بتمارين الكتاب

أولاً: أجوبة الاستاتيكا

الفصل الأول : الاحتكاك

تمارين (١)

(١) ٨٧ ، ٧٠ ث كجم

(٢) ٠,٥نيوتن أسفل المستوى ، لا يكون الجسم على وشك الحركة .

(٣) ١,٥نيوتن أعلى المستوى ، يكون الجسم على وشك الحركة .

(٤) ١٠ ، ٣٠نيوتن (٥) ٢٢٠نيوتن (٦) $١٠\sqrt{٣}$ ، $٢٠\sqrt{٣}$ نيوتن

(٧) $\sqrt{٣}$ ث كجم (٨) $\frac{١}{٢}$ ، ١٠نيوتن (٩) ١٠٠ ، ١٤٠نيوتن

(١٠) إثبات (١١) (أولاً) ٥ث كجم و تعمل لأعلى (ثانياً) ١ث كجم و تعمل لأسفل

(١٢) أولاً : إثبات ثانياً : $م_١ = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ و والاتجاه المحتمل للحركة فى اتجاه يميل على $\overrightarrow{ق_٢}$ بزاوية قياسها ٦٠°

الفصل الثانى: العزوم

تمارين (٢ – ١)

(١) ١٠٠سم^{٢} ، – ١٠سم (٢) ٣٠سم ، – ٤٠سم

(٣) $\overrightarrow{ق} - \left(\frac{\overrightarrow{ق} \odot \overrightarrow{ب}}{ب^{٢}}\right)\overrightarrow{ب}$ (٤) $\frac{١}{٢}$ ($\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$)

(٦) ٧ $\overrightarrow{ع}$ ، صفر، صفر ، ٥٧ $\overrightarrow{س}$ – ٥٧ $\overrightarrow{ص}$ ، ٤٥ $\overrightarrow{س}$ – ٢٧ $\overrightarrow{ص}$ ، ١٢ $\overrightarrow{س}$ – ٣٠ $\overrightarrow{ص}$ حيث $\overrightarrow{ع}$ متجه وحدة بحيث تكون مجموعة المتجهات ($\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$) مجموعة يمينية (٧) ٤٧ $\overrightarrow{ع}$ ، ٢٣,٥

تمارين (٢ – ٢)

(١) – ٥ $\overrightarrow{ع}$ ، $\frac{١}{٢}\sqrt{١٠}$ (٢) ١١ $\overrightarrow{ع}$ ، $\frac{١١}{\sqrt{١٣}}$ (٣) $\overrightarrow{٠}$ وخط عمل القوة يمر بنقطة الأصل

(٤) ١ (٥) $\frac{١٣}{٩}$ ، $-\frac{٧}{٩}$ (٧) صفر ، ثانياً : $١٠٠٠\sqrt{٣}$

(٨) – ٦ $\overrightarrow{ع}$ ، ١٤ $\overrightarrow{ع}$ ، ٢ $\overrightarrow{ع}$ ، مجموع العزوم = ١٠ $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ح}$ = ٢٠ $\overrightarrow{س}$ + ٣٠ $\overrightarrow{ص}$

(٩) ٣٠ ، ٣٦ ، ٢٠نيوتن . متر (١٠) $٣٦\sqrt{٣}$ ، $٣٠\sqrt{٣}$ نيوتن . متر (١١) $٣٥\sqrt{٣}$ ، $٧٥\sqrt{٣}$ نيوتن متر

(١٢) ب ء = ١,٥سم (١٣) ك = ٢٤ ث جم ، ق = $\frac{٢٨}{٣}$ (١٤) ٥٧٠ كجم . سم

(١٥) متساويان كل منهما = ٢٨٠٠٠ نيوتن . سم (١٦) ق = ١٥

(١٧) ١٥٠ نيوتن متر ، ٣٠٠ نيوتن وموجهة لداخل المربع (١٨) ١٢٦ ث جم

الفصل الثالث : القوى المستوية المتوازية

تمارين (٣ – ١)

(١) أولاً : ع = ١١٠ نيوتن وبعدها عن أ = $\frac{٣٥٠}{١١}$ سم ، ثانياً : ع = ٣٠ نيوتن وبعدها عن أ = $\frac{٢٠٠}{٣}$ سم

(٢) ٤٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن

(٣) ١٠٠ نيوتن وتبعد عن القوة الأخرى ١٠٠سم ، ٤٠٠نيوتن وتبعد عن القوة الأخرى ٢٥سم .

(٤) ق = ١٥٠نيوتن ، ١١٩سم ، ق = ٨٥٠ نيوتن ، ٢١سم (٥) ق = ٤٠ نيوتن ، ٣٠سم

(٦) إثبات (٧) إثبات (٨) ٢٠ ث كجم على بعد ١٢سم من أ وفى اتجاه القوة الأولى

(٩) إثبات (١٠) ع = ٨ نيوتن وتؤثر عند ب فى اتجاه مواز للقوتين ٨ ، ١٠ نيوتن

(١١) أ س = ١٦٣سم (١٢) ق = ٨ ، ١٩ نيوتن .

تمارين (٣ – ٢)

(١) ٥ نيوتن ، ١٥ نيوتن (٢) على بعد ٨٠سم من أحد الطرفين (٣) ٩سم ، ١٧سم

(٤) ٦ ، ٧ نيوتن (٥) ٤٠ ، ١٠ نيوتن (٦) ٢,٠٥ ، ١,٩٥ ث كجم

(٧) ٥ ، ٧ ث كجم (٨) على بعد ٢٤سم من الخيط الأكثر شداً (٩) ٤ ، ٢ ، ١٢ نيوتن

(١٠) على بعد ٥سم من ب ، ٢٠ ، ٤٠ نيوتن (١١) ٦ ، ٤ ، ١٥ ، ٢٥ نيوتن

(١٢) ٧,٥ نيوتن عند أ ، ٦٢,٥ نيوتن عند ب ، ١٥ ، ٨٥ نيوتن

(١٣) ٧٠ نيوتن فى الخيط ، ١٠ نيوتن على الحامل ، ٢٠ ، ١٠ نيوتن

(١٤) أولاً : $\frac{١}{٣}$ ٤٣٣ ث جم ، ثانياً : و = ٦٠٠ ث جم

(١٥) يبعد عن أ ٦٠سم ، وزن القضيب ٢٤ ث جم (١٦) وزن القضيب ١٥ ث جم ويبعد عن أ ٥,٦سم

(١٧) ش = ٩٥٠ ث جم ، ر = ١٠٠ ث جم ، ش = $\frac{١}{٣}$ ١٢٨٣ ث جم ، و = $\frac{١}{٣}$ ٢٣٣ ث جم

الفصل الرابع: الاتزان العام

تمارين (٤)

(١) $\frac{٥}{٤}$ و ، $\frac{٥}{٤}$ و ، ٢و

(٢) يبعد عن أ مسافة تساوى $\frac{١}{٤}$ طول السلم

(٣) إثبات

(٤) ١٠,٥ ، ٤٠,٥ ثقل كجم

(٥) ٥ ، ٣$\sqrt{٢}$ نيوتن فى اتجاه يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥°

(٦) ٤٠ ، ٢٠$\sqrt{٣}$ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$

(٧) ٢٠٠ ، ١٠٠$\sqrt{٧}$ نيوتن فى اتجاه يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$

(٨) ظا هـ = $\frac{٣}{٢}$ (٩) إثبات

(١٠) م = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ نيوتن

(١١) $\frac{١٧}{٢٤}$ و (١٢) ظا هـ = $\frac{٥}{١٢}$

(١٣) ٦٠ نيوتن (١٤) إثبات

الفصل الخامس: الازدواجات

تمارين (٥ – ١)

(١) عزما الازدواجين فى أ هما ١٢٠٠٠ ، – ١٢٠٠٠ وحدة عزم "يتزنان" ، عزما الازدواجين فى ب هما ١٥٠٠ ، – ١٥٠٠ "يتزنان" ، عزما الازدواجين فى جـ هما ١٨٠٠ ، – ١٤٠٠ "لا يتوازنان" .

(٢) ق × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ × ٦٠ = ٢ × ٥٠ ∴ ق = $\frac{٥\sqrt{٢}}{٣}$ ث كجم (٣) ١٢٥ نيوتن

(٤) ٤ ، ٢ ث كجم ، ٣٠° أو ١٥٠° مع الرأسى (٥) ١٢$\sqrt{٣}$ ، ١٢$\sqrt{٣}$ نيوتن

(٦) ٣٠٠ ث كجم ، ٤٥° (٧) ١٥٠٠ نيوتن . سم (٨) ٣٠° أو ١٥٠°

(٩) ٣٠ نيوتن . سم (١٠) ٣٠° مع الأفقى ٩٠° على الأفقى

تمارين (٥ – ٢)

(١) ١٢٠ ث كجم . سم (٢) ٤٥ ل تقريباً (٣) ١٠٤٠ ث كجم . سم

(٤) ٣٠٠$\sqrt{٣}$ نيوتن . سم (٥) ٣ ث جم (٦) ١٠$\sqrt{٣}$ ث كجم . سم

(٧) ٢١٠ نيوتن . سم ، $\frac{٧\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{٧\sqrt{٢}}{٢}$ فى اتجاهى $\overleftarrow{\text{جـأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ (٨) ٦ ، ٦ نيوتن

(٩) ٣$\sqrt{٣}$ ث جم . سم (١٠) ٩٠٠$\sqrt{٣}$ ث جم . سم (١١) ٣٠٠$\sqrt{٧}$ نيوتن . سم

(١٢) ٦٤٨نيوتن . سم (١٣) ٨٤نيوتن . سم ، ٥نيوتن (١٤) ٩٧٢نيوتن . سم ، ١٣٥ ، ١٣٥نيوتن

ثانياً : أجوبة الديناميكا

الفصل الأول : قوانين نيوتن للحركة

تمارين (١ – ١)

(١) ٢٠ثانية (٢) ٢٥ثانية (٣) ٠,٥ × $(١٠)^{٨}$جم.متر/ث

(٤) ٤٨٠٠جم.سم/ث (٥) ≃ ٧,١٣ × $١٠^{٤}$جم . سم/ث (٦) ٨٤٠جم.متر/ث

(٧) ٢١٠٠٠جم.سم/ث (٨) ١٠متر/ث (٩) ٣٠٠كجم.متر/ث ، ٣١٦كجم.متر/ث

(١٠) إثبات

تمارين (١ – ٢)

(١) د ، و (٢) ١٥٠ث جم (٣) ٩٥ ث كجم

(٤) ٥٠$\sqrt{٣}$ ث كجم (٥) ١٣٥ث كجم (٦) − ٣ك $\overline{س}$ − ٤ك $\overline{ص}$

(٧) ٣٠كم/س (٨) ٧٥كم/س

(٩) م = ٤٠٠ث جم وفى اتجاه مضاد لاتجاه $\overline{ق}$ أى أن خط عملها يميل على كل من الحبلين بزاوية قياسها ١٢٠°

تمارين (١ – ٣)

(١) $\overline{جـ}$ = $\overline{س}$ + ٥ $\overline{ص}$ ، جـ = $\sqrt{٢٦}$ (٢) أ = ٠ ، ب = ٥ (٣) أ = − ٢ ، ب = ١

(٤) ٢$\sqrt{٢}$ م/ث ، وتصنع ٤٥° مع الأفقى ، ١ ثقل كجم رأسياً لأسفل

(٥) ٢,٥متر/$ث^{٢}$ ، ٥٠$\sqrt{٣}$ + ١٩٦نيوتن (٦) ١٢,٢٥متر/ث (٧) ٤,٠٨متر/ث تقريباً

(٨) $(١٠)^{٤}$ نيوتن (٩) ٦٠ داين (١٠) ٢٤,٥ متر

(١١) ٨٠٠ث كجم (١٢) ٤٠٢ث كجم (١٣) ٢١٠ث جم ، $\frac{١}{٢}$ ثانية

(١٤) ٤٧٣٠ث كجم ، ٠,١٩٧٣م/$ث^{٢}$ سم ، ١٨,٧٥دقيقة

(١٥) ٧٠سم/$ث^{٢}$ ، ٤٠متر ، ٥٢٥متر (١٦) أ = ٤ ، ب = ٦

تمارين (١ – ٤)

(١) ٥٥٨ ، ٦٩٠ ، ٤٢٠ نيوتن (٢) ٢ ، ٢,٢ ، ١,٨ ث كجم (٣) ٦٣ كجم

(٤) ١,٩٦ متر / $ث^{٢}$ لأسفل (٥) هابط بعجلة مقدارها ٨٠سم/$ث^{٢}$

(٦) ١٤ كجم ، ١٤٠سم / $ث^{٢}$ ، ١٧ث كجم (٧) ١ كجم ، ٦ ، ٢١٥سم / $ث^{٢}$

(٨) ٢٥٠$\sqrt{٣}$ ث جم ، ٤٩٠سم / $ث^{٢}$ (٩) ٥٠٠$\sqrt{٣}$ ث جم ، ٥١٠سم/$ث^{٢}$

(١٠) ١,٥ث كجم ، ٢٤٥$\sqrt{٣}$ سم/$ث^{٢}$ (١١) ١ ثانية

(١٢) ٣٩٢سم/$ث^{٢}$ ، ٥٢٢ $\frac{٢}{٣}$سم (١٣) ٥ث كجم لكل طن

(١٤) $\frac{٥}{٦}$ ٥ث كجم لكل طن ، ٠,٠٠٤٩م/$ث^{٢}$ (١٥) ١٤$\sqrt{٢}$ متر/ث

الفصل الثانى: تطبيقات قوانين نيوتن - الحركة على مستوى خشن

تمارين (٢ - ١)

(١) ٤,٢ م / ث^{٢}، ٥,٦ نيوتن (٢) ٢٠ سم / ث^{٢}، ٢,٤ × ١٠^{٥} داين ، ٢٠ سم (٣) ٦٠ سم / ث

(٤) $\frac{٤٩}{٤٥}$ م / ث^{٢}، $\frac{٤٩}{١٥}$ م / ث (٥) ٤,٢ م /ث^{٢} ،$ص_١$ = ١١٢نيوتن ،$ص_٢$ = ٩٤,٠٨ نيوتن

(٦) ٢٠ سم / ث^{٢} ، ١٩٢٠٠ داين ، ١٩٢٠٠$\sqrt{٢}$ داين (٧) ١,٨ م / ث^{٢}، ٣ م / ث

(٨) $\frac{٤٩}{٧٥}$ م / ث^{٢} ، ٣,١٣٦ نيوتن ، $\frac{٢٤٠١}{٧٥٠} \simeq$ ٣,٢نيوتن (٩) إثبات

(١٠) ٢,٤٥م/ث^{٢}، ١٤,٧ نيوتن ،١٤,٧$\sqrt{٣}$ نيوتن (١١) ١٢٢,٥سم/ث ، ٢٢٠٥٠داين، ٢٢٠٥٠$\sqrt{٣}$ داين

(١٢) ٩٨ سم / ث^{٢} ، ٢ ثانية (١٣) ١,٤ م / ث^{٢} ، ٢٥,٢$\sqrt{٣}$ نيوتن ، ١٨٠ سم

(١٤) إثبات (١٥) ٧٠ جم

تمارين (٢ - ٢)

(١) صفر (٢) ٢٤٥سم/ث^{٢} ، ٢٢,٥ث جم (٣) ١٤٠سم/ث^{٢} ، ٣٤٣٠سم (٤) ١٥سم

(٥) (أولاً) ٤,٢$\sqrt{١٠}$ م/ث (ثانياً) ٢,٨$\sqrt{١٥}$ م/ث (٦) ٤,٢م/ث ، ٢ $\frac{١}{٧}$ ثانية

(٧) إثبات (٨) ٢٤٥سم/ث^{٢} (٩) ٧٠سم/ث ، ٥سم (١٠) ٢٥٢سم

(١١) ٧٠جم ، $\frac{١٩٦٠}{١١}$ سم/ث^{٢} ، $\frac{٣٧٨٠}{١١}$ ث جم (١٢) ٢١٠سم/ث^{٢} ، الجسم يصل إلى البكرة

(١٣) ٦١,٢٥سم/ث^{٢} ، ١٨,٧٥ ث جم ، ٦١٢,٥سم (١٤) $\frac{٤٩٠}{٣}$ سم/ث^{٢}

الفصل الثالث : الدفع و التصادم

تمارين (٣ - ١)

(١) ٢٩٤ × (١٠)^{٨} داين ث،١٠٠ث طن (٢) ٥,٦نيوتن (٣) - $\frac{٢١}{٨}$ كجم.متر/ث

(٤) ٠,١٢نيوتن/ث (٥) ٢٠سم/ث (٦) ٧متر/ث فى نفس الاتجاه ، ٠,٤نيوتن.ث

(٧) ٥ ، ١ث فى الاتجاه المضاد ، ٠,٢٥نيوتن . ث (٨) ٢٠٠٠داين . ث

(٩) ٢,٤متر/ث فى اتجاه الجسم الثانى (١٠) ١١متر/ث (١١) تسكن الكرة الأولى

(١٢) $\frac{٢٠٠}{٧}$ سم/ث (١٣) ١ م/ث فى عكس اتجاه سرعتها الأولى

(١٤) ٧١ $\frac{٣}{٧}$ث . كجم (١٥) ٤٠٣٠ داين (١٦) ١١٠٠٠٠٠ داين

(١٧) ٣٠ث ، ٩٦سم/ث ، ٥ ثوان (١٨) ١ ثانية (١٩) ١٧٧,٨نيوتن

الفصل الرابع: الشغل – القدرة - الطاقة

تمارين (٤ – ١)

(١) – ١,٥ (٢) – ٨ ، صفر (٣) ≃ ١١ × (١٠)^{١٠} إرج

(٤) صفر ، – ١٢٠٠ث كجم . متر (٥) ٨٠نيوتن . متر (٦) ٨٠$\sqrt{٣}$ جول

(٧) ٤٩جول (٨) ١,٢ × (١٠)^{٥} إرج (٩) – ٤٨٠٠٠ث كجم . متر

(١٠) ٧٥٠٠٠ إرج (١١) ١٠٦٨٧٥ث كجم .م ، – ٦٥٦٢,٥ث كجم .م ، ٦٥٦٢,٥ث كجم .م

(١٢) ٠,٥٣جول (١٣) صفر ، ٦١٧,٤جول ، – ٥٨٦,٥٣ جول

تمارين (٤ – ٢)

(٢) ١٣,٦١كيلو وات ، ≃ ١٨,٥٢ حصان (٣) ٢٥٠ حصان (٤) ٢٧ كم/س

(٥) ١٨كم/س (٦) ≃ ٨,١٨كم/س (٧) ٨كم/س

(٨) ١٥٠٠ث كجم ، ٤٣,٢كم/س (٩) ٢٤٠ث كجم (١٠) ١٠حصان، ≃٤,٧كم/س

(١١) ١١٢٥حصان (١٢) ١٥حصان ، ١٣٥ كم/ساعة (١٣) ٥٠حصان

تمارين (٤ – ٣)

(١) ١١٢٥٠نيوتن . متر (٢) (١٠)^{٨} إرج (٣) ٦٢٥٠٠٠ إرج

(٤) ٥٤كم/س (٥) ٢٢٥٠جول ، ١٨٧٥جول (٦) ٢,٥ × (١٠)^{٥} إرج

(٧) ١٢٠٠جول (٨) ٣٠٠جم (٩) ٤,٩نيوتن . متر

(١٠) ≃ ٦جول ، صفر (١١) ٤,٩جول (١٢) – ١٧,٢جول ، صفر

تمارين (٤ – ٤)

(٢) ٩٨جول (٣) ≃ ٢جول (٤) ٥جول ، ١٦,٧٦جول

(٥) ٤٤١٠ث كجم (٦) ٣٥٠متر/ث (٧) ١٠٠متر/ث

(٨) ٦,٢٥ × ١٠^{٧}إرج (٩) ٤٠٠متر/ث (١٠) ≃ ٣٤متر/ث

(١١) ٧٣,٦جول (١٢) ١,٥٦جول (١٣) ١٩٦٠جول

(١٤) ٢٤,٥متر/ث ، ١٢,٢٥متر/ث ، ٣٠٠١,٢٥جول (١٥) ١٣٧٢ × (١٠)^{٦}إرج ، ع$_{٢}$ = ٢٠سم/ث

(١٦) ١٠سم/ث ، ٧٢٠٠٠إرج (١٧) ١,٦متر (١٨) ٧متر/ث ، ١٣٧٢٠إرج ، ٣٦٤٠٠ث كجم

تمارين (٤ – ٥)

(١) ١٣٢,٣جول (٢) ٥,٨٨ × (١٠)^{٧}إرج

(٣) ٣,٥ × (١٠)^{٥}ث كجم . متر ، ٣,٤٣ × (١٠)^{٦}جول (٤) ٩٠٠ث كجم . متر ، ٨٨٢٠جول

(٥) – ١,٦٩ × (١٠)^{٧}إرج (٦) ١,٢ث كجم . متر = ١١,٧٦جول

(٧) ٧٥ ، ٥٠ث كجم . متر (٨) ٣٣٧٥ث جم . سم ، ٢١٠$\sqrt{٢}$ سم/ث

(٩) – ٨٨جول (١٠) ١٣,٥٩٧٥

إرشادات

- العلم هو الوسلة الوحيدة التى يرتفع بها شأن الإنسان إلى مراتب الكرامة والشرف.
- السلام، والحق، والعدل قيم رفيعة يجب أن نتمسك بها، ونحافظ عليها.
- صوتك المرتفع دليل على ضعف موقفك.
- ليس بالحفظ والاستظهار تحظى بالتفوق.. ولكن بالفهم والتحليل والتطبيق تزداد معارفك، وتنمو قدراتك.
- مصر تحتاج إلى المفكرين والمبدعين .. فلما لا تكون واحداً منهم ؟
- النظافة من الإيمان.
- نظافة مدينتك عنوان لمصر أمام العالم .
- البصق وإلقاء المهملات فى الشوارع يقلل من شأن وطننا أمام الأجانب